

SCUOLA MEDIA/DIDATTICA

**IL CERTO  
E IL PROBABILE**  
PICCOLO MANUALE DI LOGICA  
E DI CALCOLO DELLE PROBABILITA'

CARLO FELICE MANARA

---

**EDITRICE  
LA SCUOLA**

CARLO FELICE MANARA

# IL CERTO E IL PROBABILE

Piccolo manuale di logica  
e di calcolo delle probabilità

EDITRICE LA SCUOLA

© Copyright by Editrice La Scuola - 1989

---

OFFICINE GRAFICHE «LA SCUOLA» - BRESCIA

ISBN 88 - 350 - 8160 - 2

## PREFAZIONE

1.1. Lo scopo principale a cui mira questo «piccolo manuale» è quello di aiutare gli insegnanti delle scuole medie, in presenza dei nuovi programmi di matematica, i quali prescrivono l'insegnamento di argomenti di logica e di calcolo delle probabilità.

1.2. I programmi per la scuola media dell'obbligo, emanati con Decreto del Ministro della Pubblica Istruzione il 9/2/1979, sotto il tema *Matematica del certo e matematica del probabile*, e nella voce *Contenuti riferiti ai temi* recitano:

a) Affermazioni del tipo vero/falso e affermazioni di tipo probabilistico. Uso corretto dei connettivi logici (e, o, non): loro interpretazione come operazioni su insiemi e applicazioni ai circuiti elettrici.

[...]

c) Avvenimenti casuali: nozioni di probabilità e sue applicazioni.

Negli *Orientamenti per la «lettura» dei contenuti* gli stessi programmi recitano:

La riflessione sull'uso dei connettivi concorre alla chiarificazione del linguaggio e del pensiero logico.

[...]

La nozione di probabilità scaturisce sia come naturale conclusione dagli argomenti di statistica sia da semplici esperimenti di estrazioni casuali.

L'insegnante, evitando di presentare una definizione formale di probabilità, avrà cura invece di mettere in guardia gli allievi dai più diffusi fraintendimenti riguardanti sia l'interpretazione dei dati statistici sia l'impiego della probabilità nella previsione degli eventi. Le applicazioni non dovranno oltrepassare il calcolo delle probabilità in situazioni molto semplici, legate a problemi concreti (ad esempio nella genetica, nell'economia, nei giochi).

1.3. Analoghe esigenze si possono incontrare nelle bozze dei nuovi programmi per il biennio della scuola secondaria superiore.

Riportiamo qui di seguito le proposte di programma, presentate dal Ministro al Consiglio Nazionale della Pubblica Istruzione.

In queste proposte di programma, sotto il titolo *Contenuti* si trova il capitolo:

1. *Elementi di logica e di informatica*

a) Proposizioni: connettivi «non», «e», «o» e connettivo di implicazione. Tavole di verità e tautologie. «Modus ponens», «Modus tollens» ed altri schemi di deduzione.

b) Variabili, predicati, quantificatori.

[...]

Nel *commento ai contenuti* si legge, tra l'altro:

Gli elementi di logica non devono essere visti come una premessa metodologica a tutto il corso (quasi che occorresse imparare le «regole del ragionamento» prima di mettersi a fare matematica), ma come una riflessione che si sviluppa man mano che matura l'esperienza matematica dell'allievo. È importante osservare che la trattazione della logica potrà acquistare un risvolto fortemente operativo grazie all'utilizzo dei linguaggi di programmazione sviluppati nell'ambito dell'intelligenza artificiale nei quali la logica dei predicati diventa uno strumento per la descrizione dei problemi. Il passaggio dal linguaggio comune a quello logico è indubbiamente delicato: occorrerà mettere in evidenza come la precisione del linguaggio logico porti inevitabilmente ad una perdita di ricchezza espressiva. Anche la distinzione tra il piano linguistico e quello metalinguistico è una conquista importante. Questa distinzione (come quella tra livello sintattico e livello semantico) diventa più facilmente accessibile con la pratica del calcolatore, in cui essa si rende continuamente necessaria.

Le relazioni logiche studiate dovranno essere interpretate su insiemi. Sarà importante far capire all'allievo che la teoria delle equazioni, nella sua forma più generale, è un'applicazione di principi logici (equazioni equivalenti, equazioni che sono conseguenze logiche di altre, sistemi di equazioni ecc.).

2. Di fronte a queste prescrizioni dei programmi in vigore ed ai propositi dei programmi futuri, abbiamo creduto opportuno richiamare brevemente alcuni principi di logica e alcuni fondamenti del concetto di probabilità. E ciò è stato fatto qui con l'intento di fornire agli insegnanti le più elementari basi teoriche, sulle quali essi potessero costruire autonomamente il loro lavoro didattico. Pertanto precisiamo anzitutto che in quest'opera non intendiamo fornire delle «ricette» da applicare direttamente nella scuola, ma vogliamo stimolare la riflessione degli insegnanti, in modo che gli argomenti relativamente nuovi che debbono essere oggetto di insegnamento siano anzitutto fatti oggetto di riflessione da parte di chi deve insegnarli, e siano posseduti con quella sicurezza e padronanza che sono elementi essenziali per un buon lavoro didattico.

Avendo in vista questi scopi, abbiamo dedicato il primo capitolo al richiamo delle nozioni elementari di logica classica: pensiamo infatti che sia utile conoscere il vocabolario classico riguardante le relazioni tra le proposizioni e tra i teoremi, perché gli allievi possano, a loro volta, possedere con chiarezza ed utilizzare con sicurezza i concetti classici elementari: per esempio i concetti di coppie di proposizioni contrarie e contraddittorie, i concetti di teorema diretto, inverso, contrario, contronominale, di condizione necessaria e di condizione sufficiente, ecc. Abbiamo anche dedicato un paragrafo ai procedimenti di dimostrazione per assurdo e per induzione, ed un altro paragrafo alla soluzione dei problemi ed alla riflessione sui procedimenti di analisi e di sintesi, che già hanno attirato l'attenzione dei filosofi e dei matematici greci.

Riteniamo infatti che i progressi innegabili della logica nei tempi recenti non debbano farci dimenticare la validità e la profondità del pensiero classico in questi argomenti. E d'altra parte ci pare chiaro che le regole e le procedure convenzionali della logica più recente debbano necessariamente essere presentate e spiegate con l'impiego del linguaggio comune. Il che rende abbastanza utile, per non dire addirittura necessario, il possesso pieno e sicuro delle regole della logica classica. In questo ordine di idee pensiamo di poter richiamare qui quella frase del *commento ai contenuti* delle proposte di programma, che mette in evidenza la necessità della riflessione sui procedimenti che noi seguiamo per giungere alla certezza deduttiva.

Il secondo capitolo di quest'opera è dedicato alla teoria intuitiva degli insiemi ed alla presentazione degli elementi dell'algebra di Boole. Gli schemi del sillogismo classico sono analizzati con questi strumenti, ottenendo così un primo avvio alla formalizzazione dei rapporti logici e dei procedimenti deduttivi. Tale formalizzazione viene esposta nel terzo capitolo, che presenta il calcolo delle proposizioni non analizzate e la formalizzazione dei predicati. Qui è messo in evidenza il parallelismo tra la determinazione dei valori di verità delle proposizioni composte e i calcoli nell'aritmetica modulo 2; parallelismo che permette di impostare e risolvere i problemi della logica delle proposizioni con la stessa tecnica con la quale si risolvono i problemi algebrici.

3. Il quarto capitolo di quest'opera è dedicato alla presentazione dei concetti fondamentali del calcolo delle probabilità. È stata scelta l'impostazione che viene abitualmente chiamata «soggettiva» del concetto di probabilità; questo è visto come un giudizio che un soggetto dà del proprio impegno economico, in condizioni di informazione incompleta.

In questo ordine di idee quindi il calcolo delle probabilità è visto in piena continuità con la logica studiata in precedenza, perché si presenta come una dottrina che cerca la coerenza, in condizioni di informazione incompleta, co-

sì come la logica ricerca la coerenza deduttiva quando siano accettate le premesse di un ragionamento. In questa luce, il calcolo del rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili (purché siano tutti ugualmente possibili) viene visto soltanto come uno strumento per dare delle valutazioni accettabili, in situazioni schematiche particolari, che spesso vengono indebitamente estese, mentre sono invece lontane dalla realtà e dalle applicazioni concrete della teoria delle decisioni in condizioni di incertezza.

Ogni capitolo è concluso da un paragrafo di *Esercizi e complementi*. A questo proposito, ripetiamo che non abbiamo inteso presentare una raccolta di esercizi e di strategie didattiche immediate, ma abbiamo voluto contribuire anzitutto alla formazione dell'insegnante; questo pertanto dovrà compiere in modo autonomo il passo successivo, che consiste nel calare le nozioni acquisite e le idee astratte nella pratica del lavoro didattico quotidiano. Compito gravoso, come sanno tutti coloro che lo esercitano con impegno e coscienza, ma insopprimibile, come lo è ogni compito che si esplica nel tradurre le conoscenze astratte e rigorose della scienza nel contatto umano diretto.

## 1. LA LOGICA CLASSICA

### 1. CHE COSA È LA LOGICA? LA DEDUZIONE

Non intendiamo qui definire che cosa sia la logica; su questo argomento hanno discusso per secoli i filosofi, dando alla domanda delle risposte non sempre univoche. Ci basterà per il momento pensare alla logica, del tutto genericamente, come alla dottrina che insegna a ragionare in modo giusto; in particolare noi ci occuperemo qui di quella branca della logica che viene chiamata *logica formale*: essa insegna, tra l'altro, a dedurre in modo giusto. E qui intendiamo indicare con il termine *deduzione* quella operazione che, a partire da certe proposizioni accettate o considerate come vere oppure false, insegna a costruire, con determinate procedure, altre proposizioni delle quali si sa che sono certamente vere (oppure sono false) soltanto in forza delle procedure utilizzate.

Il fatto che una certa proposizione sia vera oppure falsa viene indicato parlando di *valore di verità* della proposizione stessa; pertanto, con questa nomenclatura, si potrebbe dire che la logica, partendo da certe proposizioni delle quali si conoscono i valori di verità, insegna a costruire con regole determinate, altre proposizioni, delle quali si conoscono con certezza i valori di verità.

Le proposizioni di partenza vengono spesso chiamate *premesse* oppure anche *ipotesi*; le proposizioni che si costruiscono vengono chiamate *conseguenze*, e l'operazione di costruzione delle conseguenze a partire dalle premesse viene chiamata *inferenza* oppure anche *deduzione* o *dimostrazione*.

Per esempio, supponiamo che sia vera la proposizione seguente:

Ambrogio vince sempre al gioco

allora siamo certi che è falsa la proposizione seguente:

Ambrogio talvolta non vince al gioco.

Due proposizioni come quelle che abbiamo riportato vengono chiamate *contraddittorie* tra loro, e chiunque, anche solo riflettendo al significato delle



parole, accetta il fatto che se l'una di esse è vera l'altra è necessariamente falsa e viceversa.

Chiameremo qui convenzionalmente *logica classica* la dottrina che studia i ragionamenti, ed in particolare le deduzioni, quando esse avvengono con l'impiego delle lingue naturali: greco, latino, francese, inglese, italiano ecc.

A questo punto è opportuno osservare che il linguaggio comune, naturale, viene utilizzato dagli esseri umani per vari scopi: per comunicare informazioni, concetti e pensieri, ma anche per comunicare emozioni e stati d'animo. Di conseguenza uno dei punti di partenza degli studi di logica, nella impostazione classica, era costituito dall'analisi dei nostri mezzi di comunicazione verbale e scritta; in altre parole, si partiva dall'analisi del discorso umano, in quanto utilizzato per comunicare dei pensieri.

Pertanto il procedimento fondamentale seguito dalla logica classica andava dall'analisi dei primi elementi costitutivi delle proposizioni all'analisi di queste ultime, ed infine giungeva allo studio del collegamento tra proposizioni, in modo da poter conoscere i valori di verità di certe proposizioni costruite in determinati modi, a partire da certe premesse, come abbiamo già detto.

Noi qui ripercorreremo brevemente questo cammino, nella misura in cui le osservazioni che faremo ed i richiami, che avremo occasione di esporre, saranno utili per il seguito.

## 2. I TERMINI E LE PROPOSIZIONI

Ricordiamo anzitutto che una parola, nel linguaggio comune, ha quasi sempre un significato che è precisato dal contesto, cioè dalla frase o addirittura dall'insieme di frasi in cui è inserita.

Consideriamo per esempio la parola «fine»; un qualunque dizionario ci avverte che essa può essere considerata come un aggettivo oppure come un sostantivo.

Come aggettivo la parola può avere un senso che è illustrato dai sinonimi: squisito, fino, delicato, sagace, arguto, sopraffino.

Come sostantivo la parola può essere di genere maschile oppure femminile; i possibili significati possono essere chiariti dai sinonimi:

cima, chiusa, cessazione, compimento, esito, finale, fondo, estremo, estremità, perfezione, riuscita, successo, termine, meta, limite, confine.

Pertanto, quando si voglia ragionare con rigore, è necessario precisare il significato delle parole che si impiegano, significato che può dipendere dagli altri termini che appartengono alla stessa frase.

Non ci addentreremo qui nell'analisi minuta dei possibili significati delle parole, e ci limiteremo a ricordare che, secondo la visione dei classici, non si può parlare di *verità* delle singole parole. Infatti, in questo ordine di idee, soltanto una proposizione e non una parola isolata, può essere vera oppure falsa; e ciò perché soltanto una proposizione esprime un giudizio, cioè l'affermazione con la quale la nostra mente attribuisce una certa qualità ad un certo soggetto, oppure la nega di quel soggetto.

Le proposizioni che prenderemo in esame saranno del tipo delle seguenti:

A: *tutti i lombardi sono biondi*;

E: *nessun lombardo è biondo*;

I: *alcuni lombardi sono biondi*;

O: *alcuni lombardi non sono biondi*.

Come si vede da questi esempi, le proposizioni considerate attribuiscono oppure negano una certa qualità (nella fattispecie il fatto di essere biondi) a certi soggetti. I termini che designano le qualità considerate vengono chiamati *predicati*; quindi potremo dire che le proposizioni enunciate attribuiscono oppure non attribuiscono certi predicati a certi soggetti.

Il soggetto ed il predicato di una proposizione vengono anche chiamati *termini* della proposizione stessa; più precisamente essi vengono detti *termini categorematici*, nome convenzionale, che si impiega per esprimere che le parole che indicano tali termini hanno significato anche se sono prese da sole. Altre parole, come *tutti*, *alcuni*, *nessuno*, *non* e parole equivalenti, vengono dette *termini sincategorematici*, per indicare che non hanno significato compiuto quando siano considerati da soli, ma acquistano significato solo quando siano presi insieme con altri termini.

Le proposizioni che prenderemo in considerazione nel seguito saranno quindi costituite da un soggetto, da un predicato e da una *copula verbale* abitualmente espressa da una terza persona del verbo *essere* cioè da una parola del tipo *è* oppure *sono* oppure da altre parole di significato equivalente, con le quali si esprime il giudizio che la qualità espressa dal predicato compete, oppure non compete, al soggetto.

Pertanto, ai fini della logica, rivolgeremo la nostra attenzione soltanto alle proposizioni che possono essere ricondotte a queste forme, e non ad altri discorsi, che pure vengono pronunciati quotidianamente, ma che costituiscono comunicazioni di stati d'animo, di emozioni, oppure non comunicano dei giudizi, ma mirano a suscitare stati d'animo ed emozioni negli ascoltatori o nei lettori.

Alle proposizioni che abbiamo presentato all'inizio di questo paragrafo vengono abitualmente attribuiti i nomi seguenti:

alla A: *universale affermativa*;

alla E: *universale negativa*;

alla I: *particolare affermativa*;

alla O: *particolare negativa*.

La A e la E vengono dette *contrarie fra loro*; la I e la O vengono dette *subcontrarie*. Ancora, la I e la O vengono dette *subordinate* rispettivamente della A e della E; viceversa queste ultime vengono dette *subordinanti* della I e della O rispettivamente. Infine la A e la O, così come la E e la I vengono dette *contraddittorie* tra loro.

Abitualmente si dispongono i quattro simboli convenzionali ai vertici di un rettangolo, nel modo seguente:

	<i>affermativa    negativa</i>	
<i>universale</i>	A	E
<i>particolare</i>	I	O

Con questa disposizione convenzionale si hanno nella prima riga le proposizioni universali, e nella seconda le particolari, a sinistra le affermative, a destra le negative. Si suol dire che le proposizioni delle due righe differiscono tra loro per la *quantità*, mentre quelle delle due colonne differiscono tra loro per la *qualità*.

### 3. INFERENZE IMMEDIATE

Dall'esame degli esempi che abbiamo presentato, e di tutti quelli che si possono escogitare, si possono trarre subito alcune regole di logica formale, cioè delle regole che permettono di decidere immediatamente dei valori di verità di certe proposizioni a partire da quelli di altre, in base alla sola forma delle proposizioni stesse. Tali regole vengono chiamate *regole di inferenza immediata*, e saranno enunciate qui senza dimostrazione, ma soltanto, come ab-

biamo fatto, con la presentazione di esempi. Sarebbe infatti impossibile dimostrare la validità di tali regole senza ricorrere a ragionamenti, i quali però a loro volta sarebbero fondati sulla validità delle regole stesse che si vorrebbero dimostrare.

Le regole di cui parliamo sono le seguenti.

a) *Le due proposizioni contrarie, A ed E, possono essere insieme false, mai insieme vere.*

b) *Le due subcontrarie, I ed O possono essere insieme vere, mai insieme false.*

c) *Considerate le due coppie di proposizioni contraddittorie tra loro, cioè la A e la O, la E e la I, se una proposizione di una coppia è falsa l'altra è certamente vera, e viceversa se una proposizione di una coppia è vera l'altra è certamente falsa.*

d) *Dalla falsità delle subordinate I ed O si deduce la falsità delle subordinanti, rispettivamente A ed E.*

e) *Dalla verità delle subordinanti A ed E si deduce la verità delle subordinate, rispettivamente I ed O.*

Quest'ultima regola è stata talvolta contestata, nel corso della storia, da filosofi e da logici, perché spesso essa è stata interpretata come una implicita (ed indebita) affermazione dell'esistenza di certi enti di cui parlano le subordinate.

Per evitare perplessità, avvertiamo qui che, quando enunciamo una proposizione, intendiamo in ogni caso parlare di enti effettivamente esistenti.

Osserviamo inoltre che le regole enunciate non si applicano soltanto alle proposizioni del tipo di quelle che abbiamo presentato, ma valgono anche per altre proposizioni, enunciate in modo diverso; ciò si rileva dagli esempi seguenti, nei quali abbiamo mantenuto le denominazioni convenzionali per le proposizioni, anche se esse sono formalmente diverse da quelle finora considerate.

Si considerino i seguenti esempi:

A: Ambrogio vince sempre al gioco;

E: Ambrogio non vince mai al gioco;

I: Ambrogio talvolta vince al gioco;

O: Ambrogio talvolta non vince al gioco.

È facile verificare che, per le proposizioni che abbiamo esposto ora, valgono le regole di inferenza immediata che abbiamo enunciato.

Altre regole dello stesso tipo riguardano l'operazione che viene chiamata *conversione*. Si chiama così l'operazione che si esegue su una proposizione

data, quando si costruisce una nuova proposizione che ha come soggetto il predicato della proposizione data e come predicato il soggetto di questa.

Così, per esempio, data una proposizione del tipo E, enunciata in precedenza:

E: nessun lombardo è biondo,

eseguendo l'operazione di conversione si ha:

E: nessun (uomo) biondo è lombardo.

Un'operazione di conversione del tipo di quella che abbiamo eseguito ora, che non cambia la quantità della proposizione sulla quale viene eseguita, viene chiamata *conversione semplice*; essa conduce da proposizioni vere a proposizioni pure vere quando viene applicata alle proposizioni del tipo E e del tipo I.

È possibile prendere in considerazione anche un secondo tipo di conversione, che viene chiamata *conversione per accidens*. Con tale operazione non soltanto si cambiano di posto il soggetto ed il predicato della proposizione data, ma se ne cambia anche la quantità, costruendo una proposizione particolare a partire da una universale. In tal modo si ottengono proposizioni vere a partire da proposizioni vere nei casi in cui si operi su proposizioni dei tipi A oppure E.

Così, per esempio, a partire da una proposizione del tipo A già considerata:

A: tutti i lombardi sono biondi,

convertendo *per accidens* si ottiene la proposizione:

I: alcuni (uomini) biondi sono lombardi;

ed a partire da una E già enunciata:

E: nessun lombardo è biondo,

convertendo *per accidens* si ottiene:

O: alcuni (uomini) biondi non sono lombardi.

È possibile infine eseguire una terza operazione di conversione, che viene chiamata *conversione per contrapposizione*. Tale operazione si esegue scambiando di posto, come negli altri casi, il soggetto ed il predicato di una proposizione, e premettendo la negazione *non* a ciascuno di essi.

Si constata che questa operazione porta proposizioni vere in proposizioni vere nei casi in cui venga applicata alle proposizioni dei tipi A ed O, come si può vedere dagli esempi seguenti.

Dalla proposizione:

tutti i milanesi sono lombardi,

si deduce, convertendo per contrapposizione:

tutti i non lombardi sono non milanesi.

Analogamente, dalla proposizione:

alcuni lombardi non sono biondi,

si deduce, convertendo per contrapposizione:

alcuni non biondi non sono non lombardi,

ovvero, in forma linguisticamente più accettabile:

alcuni non biondi sono lombardi.

#### 4. IL SILLOGISMO

Abbiamo visto nel paragrafo precedente i casi più importanti di inferenza immediata. Vogliamo ora analizzare brevemente i casi in cui la determinazione dei valori di verità di certe proposizioni a partire da altre non è immediata, ma richiede un procedimento di deduzione meno semplice.

In questo ordine di idee, le procedure più importanti sono quelle chiamate, con termine derivante dal greco, *sillogismi*.

Consideriamo il seguente esempio:

- (1) Tutti i lombardi sono italiani.
- (2) Tutti i milanesi sono lombardi.

Dunque:

- (3) Tutti i milanesi sono italiani.

Si osserva che nel ragionamento precedente sono coinvolti tre termini: «milanesi», «italiani», «lombardi». I primi due sono soggetto e predicato della proposizione (3), che viene chiamata *conclusione* del sillogismo; le proposizioni (1) e (2) vengono chiamate *premesse* del sillogismo. Il termine «lombardi» non entra nella conclusione e viene chiamato *termine medio* o anche semplicemente *medio* del sillogismo. Il soggetto ed il predicato della conclusione verranno anche indicati brevemente nel seguito con i simboli S e P rispettivamente; analogamente il termine medio verrà simbolizzato con M.

La logica classica ha enumerato 19 forme valide di ragionamento sillogistico, e le ha classificate in vari tipi, detti convenzionalmente *figure* del sillogismo, a seconda della posizione che il termine medio prende nelle due pre-

messe. Precisamente si suole attribuire alla *prima figura* il sillogismo in cui il termine medio è soggetto in una delle premesse e predicato nell'altra; si suole attribuire alla *seconda figura* il sillogismo in cui il termine medio è predicato in entrambe le premesse; infine si attribuisce alla *terza figura* il sillogismo in cui il termine medio è soggetto in entrambe le premesse.

I vari tipi validi di sillogismo sono spesso richiamati con certe parole tradizionali, che sono prive di senso qualora vengano considerate come parole del linguaggio comune, e che hanno soltanto un valore di richiamo mnemonico. Precisamente ogni parola contiene certe vocali: le prime tre di esse sono A, oppure E, I, O e richiamano quindi le notazioni convenzionali delle proposizioni che abbiamo presentato nel paragrafo 2.

Noi ci limiteremo per il momento a presentare i quattro schemi di sillogismo che corrispondono a quelle che, nella nomenclatura classica, si chiamavano le *forme perfette della prima figura*. Le parole convenzionali con cui vengono presentati tali schemi ubbidiscono alle convenzioni di cui abbiamo detto; il lettore riconoscerà senza difficoltà il soggetto, il predicato ed il termine medio in ognuno degli schemi seguenti.

#### *Schema BARBARA*

Ogni lombardo è italiano.  
Ogni milanese è lombardo.  
Dunque:  
Ogni milanese è italiano.

#### *Schema CELARENT*

Nessun lombardo è di razza gialla.  
Ogni milanese è lombardo.  
Dunque:  
Nessun milanese è di razza gialla.

#### *Schema DARII*

Tutti i milanesi sono lombardi.  
Alcuni (uomini) biondi sono milanesi.  
Dunque:  
Alcuni (uomini) biondi sono lombardi.

#### *Schema FERIO*

Nessun lombardo è di razza gialla.  
Alcuni (uomini) biondi sono lombardi.  
Dunque:  
Alcuni (uomini) biondi non sono di razza gialla.

Svilupperemo in seguito l'analisi degli altri tipi di sillogismo, con le tecniche dell'algebra di Boole.

## 5. I TEOREMI

In matematica si utilizzano frequentemente delle notazioni convenzionali per indicare la dipendenza logica tra proposizioni o insiemi di proposizioni.

Così, nella pratica abituale della trattatistica di oggi, indicando con H una proposizione o un insieme di proposizioni che si assumono come punti di partenza (ipotesi), ed indicando con T una proposizione o un insieme di proposizioni che si dimostrano a partire dalla ipotesi o dalle ipotesi H, si suole scrivere simbolicamente:

$$(1) \quad H \Rightarrow T$$

per indicare che, partendo da H ed utilizzando le leggi della logica, si può dimostrare T. Si suole leggere la (1): H *implica* T, e la relazione simbolizzata dalla (1) viene anche chiamata *implicazione*. Il ragionamento deduttivo che conduce a dimostrare T quando sia accettata H viene chiamato *teorema*; ovviamente la proposizione (o l'insieme delle proposizioni) H viene chiamata *ipotesi* del teorema, e la proposizione (o l'insieme delle proposizioni) T viene chiamata *tesi* del teorema stesso.

La formula convenzionale (1) viene spesso letta anche in altri modi: per esempio con la frase: «*se* (è vera) H, *allora* (è vera) T»; oppure anche «*da* H *si deduce* T». Si suol dire anche che «la T è condizione *necessaria* perché sia vera H», e che «H è condizione *sufficiente* perché sia vera T».

Per esempio, sia *a* un numero naturale, rappresentato nella forma abituale, mediante le convenzioni posizionali che utilizzano le note dieci cifre. Parleremo brevemente dell'ultima cifra a destra del numero per indicare la cifra che sta all'ultimo posto a destra, nella sua rappresentazione decimale.

Sia H la frase seguente:

l'ultima cifra a destra del numero *a* è 1;

e sia T la frase:

l'ultima cifra a destra del numero  $a^2$  è 1.

Con semplici verifiche di aritmetica elementare si constata che in questo caso vale la (1).

Il teorema espresso dalla formula:

$$(2) \quad T \Rightarrow H$$

viene chiamato *teorema inverso* di quello espresso dalla (1).

È chiaro che dalla validità della (1) non è lecito dedurre in generale la validità della (2). Per esempio, nel caso esposto poche righe sopra, il fatto che il quadrato di un numero abbia come ultima cifra a destra 1 non porta come conseguenza che anche l'ultima cifra a destra del numero sia 1; infatti potrebbe anche essere il 9, e la (1) sarebbe vera lo stesso, senza che sia vera la (2).



Si osserva subito che la relazione tra i due teoremi (1) e (2) è simmetrica, nel senso che la (2) si ottiene dalla (1) scambiando di posto la tesi con l'ipotesi; ma uno scambio analogo dalla (2) porta alla (1). Pertanto si suol dire che i due teoremi (1) e (2) sono tra loro *inversi*; e vale ovviamente l'osservazione già fatta, che dalla validità dell'uno non si può dedurre la validità dell'altro.

Quando avviene che siano veri entrambi i teoremi espressi dalla (1) e dalla (2), la H viene detta *condizione necessaria e sufficiente* per la T ed analogamente la T viene detta condizione necessaria e sufficiente per la H; si esprime questo fatto scrivendo simbolicamente:

$$(3) \quad H \Leftrightarrow T;$$

in questo caso si suole anche dire che H e T sono *equivalenti*.

Sempre con le diffuse convenzioni utilizzate nei testi di matematica, indicata con H una proposizione, si suole indicare con il simbolo:

$$(4) \quad -H$$

la proposizione che è vera se la H è falsa e che è falsa se la H è vera; tale proposizione viene anche chiamata la *negazione* della H.

Si accetta come naturale, dalla intuizione, la validità della formula seguente:

$$(5) \quad -(-H) \Leftrightarrow H;$$

si suole anche dire che la (5) esprime la *legge della doppia negazione*.

Con questa nomenclatura il teorema espresso dalla formula:

$$(6) \quad -H \Rightarrow -T$$

viene chiamato *teorema contrario* di quello espresso dalla (1); anche in questo caso si osserva che il teorema (1), in forza della legge della doppia negazione è contrario di quello espresso dalla (6) e pertanto i due teoremi possono essere chiamati *contrari tra loro*.

Dall'esempio presentato sopra si deduce che se vale la (1) non necessariamente vale anche la (6).

Infine il teorema espresso dalla formula:

$$(7) \quad -T \Rightarrow -H$$

viene chiamato *contronominale* del teorema (1).

Si osserva ancora una volta che i due teoremi (1) e (7) sono in posizione simmetrica tra loro; in questo caso inoltre, l'uno è conseguenza dell'altro. Ciò si esprime, utilizzando i simboli introdotti, con la formula:

$$(8) \quad (H \Rightarrow T) \Leftrightarrow (-T \Rightarrow -H)$$

Questa proprietà viene spesso utilizzata in matematica; infatti spesso, invece di dimostrare un determinato teorema si dimostra il contronominale.

Per esempio, invece di dimostrare il teorema seguente:

«Ogni parallelogrammo che sia in particolare un rettangolo ha le diagonali uguali tra loro»,

si può dimostrare il teorema contronominale:

«Se in un parallelogrammo le due diagonali sono diverse il parallelogrammo non può essere un rettangolo».

Le convenzioni di scrittura che abbiamo presentato possono essere considerate degli espedienti per abbreviare le enunciazioni dei teoremi. Tuttavia la logica moderna ha costruito vari sistemi di notazioni che permettono di rappresentare le proposizioni, ed i loro rapporti in modo tale che la deduzione di proposizioni valide da altre accettate come valide (cioè l'operazione fondamentale della logica formale) possa avvenire con l'applicazione di regole di sintassi, analoghe a quelle che reggono i calcoli sui numeri.

Con questi strumenti quindi la deduzione delle conseguenze da certe ipotesi può spesso essere affidata alle macchine, così come alle macchine si affidano i calcoli sui numeri.

## 6. LE DEFINIZIONI

Abbiamo già avuto occasione di osservare che, quando si voglia ragionare correttamente, è necessario precisare il significato delle parole che si impiegano; ed abbiamo anche dato degli esempi di parole che possono avere vari significati, i quali possono essere determinati soltanto dal contesto in cui le parole stesse sono inserite.

La precisazione del significato di un termine viene fatta di solito con un discorso che viene chiamato *definizione* del termine stesso.

Nella grandissima maggioranza delle lingue nazionali oggi parlate esistono dei libri, che vengono chiamati «dizionari», i quali dovrebbero avere come scopo quello di precisare il significato delle parole della lingua alla quale essi si riferiscono. Tuttavia ben raramente ciò avviene, ed i dizionari di una lingua quasi sempre, in corrispondenza ad ogni termine elencato, si limitano

ad enunciare dei sinonimi, che ovviamente non spiegano il significato del termine stesso, ma ne illustrano il significato in altra forma, e con parole diverse.

Questa situazione genera talvolta degli aspetti lievemente umoristici, come è stato messo in evidenza da L. Longanesi il quale presenta come un fenomeno di «moto perpetuo» la consultazione di un dizionario che porta le seguenti indicazioni:

*sedia* vedi *segiola*;  
*segiola* vedi *sedia*.

Dal punto di vista della logica, l'Autore del dizionario considerato da Longanesi si è reso colpevole di un errore che è stato classificato da tempo sotto il nome di *circolo vizioso*.

Naturalmente, una situazione paradossale come quella descritta sarebbe stata evitata se l'Autore del dizionario avesse scritto per esempio:  
«*sedia*: mobile destinato ad essere utilizzato per sedersi».

Tuttavia si osserva immediatamente che la proposizione scritta ora ha significato soltanto se il lettore o l'ascoltatore conosce i significati che, nel contesto della frase, prendono i termini ivi utilizzati. In altre parole, una proposizione che voglia essere la definizione di un termine, deve utilizzare soltanto altri termini il cui significato si presume già noto al lettore o all'ascoltatore. Pertanto, ogni dizionario rigorosamente costruito dovrebbe iniziare con l'elenco dei termini il cui significato si presume noto al lettore.

Analogamente, l'esposizione di una teoria rigorosamente costruita dovrebbe incominciare con l'elenco dei termini che nella teoria stessa non vengono definiti con una definizione esplicita, analoga a quella che abbiamo enunciato sopra per il termine *sedia*. Tali termini vengono chiamati *primitivi* (beninteso in quella teoria); ogni altro termine dovrebbe essere definito esplicitamente, con una procedura la cui analisi è stata fatta da tempo, e della quale daremo qualche cenno qui di seguito.

⇒ A tal fine osserviamo che, nella pratica abituale della scienza, ma anche del buon senso, la definizione di un concetto viene data assegnando una successione di classi, ciascuna contenuta nella precedente; ricordiamo per esempio che la zoologia dà una classificazione degli animali secondo una successione di classi che hanno i nomi ben noti: tipo, classe, ordine, famiglia, genere, specie. La procedura adottata dalla logica è abbastanza analoga. Precisamente, nella visione classica della logica, si chiama *definizione di un termine* un discorso che precisa il significato del termine stesso mediante due classi l'una contenuta nell'altra, alle quali appartiene l'ente designato dal termine che si definisce. }

In questo ordine di idee, la logica classica ha analizzato i concetti generali, che possono essere attribuiti come predicati a certi soggetti, permettendo co-

si la definizione degli enti che si considerano. Tali concetti generali sono chiamati anche *predicabili*; essi sono stati elencati nel modo seguente: genere, specie, differenza, proprio, accidente.

I concetti di *genere* e di *specie* corrispondono a due classi, la seconda contenuta nella prima: spesso anche si prendono in considerazione vari generi, ed in particolare si distingue un *genere prossimo* ed un *genere remoto*; di conseguenza il termine *specie* indica una classe in ogni caso contenuta nel genere prossimo.

Con il termine *differenza* si indica un concetto che costituisce la specie nell'interno del genere, o in particolare del genere prossimo. Così per esempio, con riferimento ai concetti della geometria, si potrebbe pensare di definire il triangolo come una figura costituita da tre punti: A, B, C non allineati, dai punti che appartengono ai segmenti aventi i punti considerati a coppie come estremi, e dai punti dei segmenti aventi come estremi, in tutti i modi possibili, due qualsivogliano dei punti sopra determinati. In questo caso il genere è quello delle figure geometriche, il genere prossimo è quello delle figure piane, la differenza è precisata dalla frase che specifica il triangolo come una specie, nel genere delle figure piane.

Il concetto predicabile *proprio* indica (come lo dice il suo nome) una proprietà che consegue dalla definizione dell'ente che si considera, ma non ne può costituire la definizione. Così per esempio, nel caso del triangolo considerato or ora, si potrebbe dire che è proprio del triangolo il fatto di essere una figura piana, perché si dimostra che, in base alla definizione data, il piano determinato dai tre punti A, B, C contiene ogni punto del triangolo. Ma ovviamente anche altre figure hanno questa proprietà che quindi non è sufficiente per costituire la specie «triangolo» nel genere delle figure geometriche.

Infine l'*accidente* indica una proprietà che non consegue dalla natura stessa dell'ente che si definisce; per esempio il fatto che le lunghezze dei tre lati di un triangolo stiano tra loro come i numeri 6, 7, 8.

È chiaro tuttavia che non è possibile proseguire indefinitamente nella procedura di definizione esplicita di ogni termine che si impiega. Questa osservazione è stata presentata in termini molto chiari da B. Pascal, grande matematico, filosofo e teologo francese del secolo XVII. Scrive infatti Pascal, nella sua opera intitolata *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*:

[...] *spingendo sempre più avanti la ricerca, si giunge necessariamente a certi termini primitivi che non possono essere definiti, [si giunge] a principi talmente chiari che non se ne trovano di più chiari, da poter utilizzare per la loro dimostrazione. Ci si convince quindi del fatto che la condizione umana, naturale ed immutabile, non permette di trattare alcuna scienza in forma assolutamente completa.* (B. PASCAL, *Pensées et opuscules*, par Léon Brunschvicg, Hachette, Paris 1976).

Le osservazioni precedenti ci convincono del fatto che esistono certi termini il cui significato deve essere acquisito con strumenti diversi dall'enunciazione di proposizioni verbali o di definizioni esplicite.

A ben guardare, tali sono i termini che costituiscono il fondamento e l'inizio di ogni lingua effettivamente parlata. Infatti, se osserviamo il bambino che inizia la propria vita di relazione, potremo convincerci del fatto che egli impara il significato delle parole con l'uso di queste; oppure, se immaginiamo uno straniero, che viene nel nostro Paese senza conoscere la nostra lingua e della cui lingua non conosciamo nulla, ci avvediamo del fatto che il solo procedimento per far conoscere a questo soggetto il significato di certi termini che designano degli oggetti concreti è la *definizione per additamentum* oppure *definizione ostensiva*. Con questo procedimento il significato di una parola della nostra lingua viene precisato al nostro interlocutore pronunciando la parola e contemporaneamente additando l'oggetto che ad essa corrisponde.

Una procedura cosiffatta è valida tuttavia quando si tratti di definire i termini linguistici che indicano degli oggetti concreti, materialmente presentabili ed ostensibili. Ma questa procedura non può ovviamente essere adottata quando si tratti di precisare il significato di termini che indicano dei concetti astratti, i quali pertanto non possono essere designati con atti materiali.

In questi casi, ed in altri consimili, la precisazione del significato di un termine può essere fatta soltanto con un procedimento che viene chiamato *definizione per postulati* o anche, da qualche Autore, *definizione implicita* o *definizione d'uso*. È questa la procedura che occorre seguire quando si abbia a che fare con i concetti fondamentali di una teoria: questi infatti potrebbero essere definiti soltanto facendo ricorso ad altri concetti, per così dire, ancora più fondamentali; ma ovviamente l'operazione non può essere proseguita all'infinito.

Pertanto occorre scegliere dei punti di partenza, per poter precisare i concetti di cui si parla, e per poter stabilire le premesse di ogni deduzione successiva. È questa la procedura scelta per esempio da G. Peano nella sua opera scritta in latino ed intitolata *Arithmetices principia nova methodo exposita*, per esporre i fondamenti dell'aritmetica razionale. Infatti nell'opera di Peano, diretta a chiarire il concetto di numero naturale, non si trova alcuna frase del tipo:

«Il numero è...».

Peano invece enuncia semplicemente cinque proposizioni che parlano del numero naturale e di altri concetti collegati con questo. Tali proposizioni costituiscono dunque la *definizione implicita* del concetto di numero naturale; infatti questo concetto è preso da Peano come concetto primitivo e fondamentale, in modo che non è possibile darne una definizione che faccia appello a concetti ancora più fondamentali.

Analoga posizione è presa di D. Hilbert, nella sua celebre opera sui fondamenti della geometria, intitolata appunto *Grundlagen der Geometrie*. In essa non si trovano delle proposizioni del tipo:

«Il punto è...» oppure «La retta è...».

Semplicemente si incomincia col parlare di punti, rette e piani, con proposizioni non dimostrate che collegano questi concetti tra loro.

Quindi, ripetiamo, in questo atteggiamento, le proposizioni iniziali di una teoria costituiscono le definizioni implicite (o definizioni d'uso) dei concetti di cui parla la teoria stessa.

A ben guardare ci si trova in una situazione analoga quando si cerca di spiegare a qualcuno un gioco con le carte; ovviamente i nomi che si danno alle carte non costituiscono le definizioni delle carte stesse in un determinato gioco; tali definizioni sono date dalle regole con le quali, nel gioco, si manovra con le carte. Di modo che nessuno trova strano il fatto che una certa carta, per esempio il Re, in un certo gioco abbia un determinato comportamento ed un determinato valore ed in un altro gioco abbia un comportamento ed un valore del tutto diversi. Semplicemente si tratta di carte diverse perché le regole dei due giochi sono diverse, e, come abbiamo detto, sono le regole a dare la definizione delle singole carte.

Le proposizioni con le quali si inizia una determinata teoria vengono chiamate con diversi nomi, a seconda dei vari atteggiamenti degli Autori, dei loro gusti e delle loro abitudini. G. Peano le chiama semplicemente *proposizioni primitive*; altri Autori le chiamano *assiomi* (beninteso della teoria in cui sono enunciati). Nelle trattazioni classiche si trova il nome di *postulati*; questo termine, che viene dal latino, traduce esattamente il termine greco utilizzato da Euclide per le proposizioni geometriche che egli enuncia, senza dimostrazione, all'inizio del suo celebre trattato intitolato *Elementi*. Il termine stesso indica che, enunciando queste proposizioni, il trattatista non intende imporre ai lettori di accettarle, ma semplicemente richiede che esse siano accettate.

Oggi è diffusa l'abitudine di chiamare *assiomi* le proposizioni iniziali di una teoria. Tale abitudine non è forse molto opportuna, perché il termine *assioma*, nel linguaggio comune e nell'uso di alcuni sistemi filosofici, viene spesso utilizzato per indicare una proposizione che è accettata per la sua evidenza. Era forse questo almeno in parte, il senso in cui le proposizioni iniziali della geometria sono state considerate durante i secoli precedenti il nostro. Precisamente, in questo atteggiamento, si pensava che le proposizioni iniziali della geometria fossero imposte dalla evidenza di una realtà fuori di noi. Ma oggi, dopo una lunga evoluzione critica, ci si rende conto del fatto che le proposizioni iniziali di una teoria possono essere scelte con una certa libertà; esse non vengono dimostrate (beninteso nell'ambito della teoria) perché

sono enunciate all'inizio, e quindi la loro validità non può essere ricondotta a quella di altre proposizioni che le precedono (ripetiamo, in quella teoria). Ma nulla vieta che in un'altra teoria le stesse proposizioni possano essere dimostrate, purché prima di esse siano state enunciate altre proposizioni sufficienti per la loro deduzione.

Si può osservare che le considerazioni finora svolte possono essere applicate in particolare alla nota frase di G. Cantor, che in qualche manuale viene presentata come la definizione del concetto di *insieme*. Tale frase suona press'a poco come segue:

«Insieme è una collezione di elementi considerati come un tutto unico».

Ovviamente, per poter considerare questa frase come la definizione del concetto di insieme, occorre accettare il termine *collezione* come noto, o fondamentale; pertanto occorrerebbe includere tale termine tra quelli che si definiscono implicitamente con postulati. Quindi il problema della definizione del concetto di insieme, non è risolto con questa procedura, ma soltanto spostato.

Possiamo infine osservare che talvolta si prende in considerazione una operazione logica che consiste nell'assegnare un nome ad un certo ente; tale operazione viene chiamata *definizione nominale* e viene seguita spesso in matematica, quando si introducono simboli nuovi, per abbreviare e chiarire i discorsi che diventerebbero altrimenti complicati e lunghi. Così, per esempio, B. Pascal (che abbiamo già nominato) osserva che il termine «numero pari» potrebbe essere risparmiato, perché esprime esattamente il concetto di «numero naturale che, diviso per 2, dà come resto zero»; tuttavia è molto comodo utilizzare il termine «pari» piuttosto che dover ripetere la lunga frase ogni volta che si incontra un numero di questo tipo.

Osserva G. Peano che le definizioni dei nuovi simboli vengono abitualmente presentate nella forma seguente:

(1) *Simbolo nuovo = espressione costituita da simboli noti.*

Tuttavia la (1) non rappresenta una relazione tra due concetti noti; pertanto Peano proponeva di distinguere l'uso del simbolo « = » quando esprime una relazione tra quantità, dall'uso che se ne fa per introdurre simboli nuovi.

Questa osservazione dovrebbe essere tenuta sempre presente, per evitare equivoci. Per esempio, consideriamo la procedura che si segue per definire il concetto di radiante.

Siano date due semirette complanari  $a$  e  $b$  e si supponga che esse abbiano in comune l'origine  $O$ ; si tracci con centro in  $O$  una circonferenza di raggio arbitrario  $r$ , e si indichino con  $A$  e  $B$  le intersezioni di questa circonferenza con le semirette  $a$  e  $b$  rispettivamente; si supponga di saper misurare la lunghezza dell'arco della circonferenza che ha come estremi i punti  $A$  e  $B$ .

In queste ipotesi si può formulare la seguente definizione:

(2)  $\text{rad}(a, b) = \text{lunghezza dell'arco } \widehat{AB}, \text{ divisa per la lunghezza del raggio } r.$

Nel caso della (2) ci si trova ovviamente nelle condizioni considerate da Peano, perché il simbolo  $\text{rad}(a, b)$  non è stato mai incontrato prima. Pertanto la (2) non esprime la relazione di uguaglianza tra quantità note, ma costituisce la definizione del nuovo simbolo.

Occorre tuttavia osservare che il secondo membro della (2) fa menzione di un ente (il raggio  $r$  della circonferenza) che non viene menzionato nel primo membro; pertanto occorre dimostrare che la definizione (2) è, come suol dirsi, ben posta; e ciò si fa dimostrando che il numero che si ottiene dal rapporto menzionato al secondo membro non dipende dal raggio arbitrariamente scelto per la circonferenza.

Questa dimostrazione si fonda su noti teoremi di geometria elementare ed è indispensabile, se si vogliono evitare errori.

Infatti i teoremi di geometria elementare ricordati si fondano su concetti che fanno riferimento alla similitudine tra figure; di conseguenza la (2) risulterebbe priva di senso in una geometria nella quale non si può costruire la teoria della similitudine.

## 7. LE DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO E PER INDUZIONE

Abbiamo visto che le relazioni tra le proposizioni dei quattro tipi fondamentali: A, E, I, O, che abbiamo presentato nel paragrafo 2, permettono di enunciare delle *regole di inferenza immediata*, cioè delle regole che consentono di determinare i valori di verità di certe proposizioni, che si ottengono con determinate procedure, a partire da altre proposizioni delle quali si conoscono i valori di verità.

Queste regole fondano la validità di certi procedimenti classici di dimostrazione che vengono chiamati di *riduzione all'assurdo*.

Un procedimento cosiffatto è basato sulle particolari regole di inferenza immediata che legano tra loro due proposizioni contraddittorie; come abbiamo visto, tali regole assicurano che, date due proposizioni contraddittorie, se una di esse è vera l'altra è falsa e viceversa, se una di esse è falsa l'altra è certamente vera.

Pertanto, quando si voglia dimostrare che una certa proposizione è vera, si può dimostrare che la sua contraddittoria è falsa. E per dimostrare che una proposizione è falsa, basta dimostrare che da essa si deduce una contraddizione, ovvero, come suol dirsi, che essa conduce all'assurdo.



Si consideri per esempio il seguente sillogismo (dello schema BAROCO della seconda figura):

(1) Tutti i mammiferi sono animali a sangue caldo.

(2) Alcuni quadrupedi non sono animali a sangue caldo (per esempio le lucertole).

Dunque:

(3) Alcuni quadrupedi non sono mammiferi.

Per dimostrare che la conclusione di questo ragionamento è vera, si può dimostrare che la sua contraddittoria è falsa, cioè che è falsa la proposizione:

(4) Tutti i quadrupedi sono mammiferi.

A tal fine si costruisca un sillogismo dello schema BARBARA della prima figura, che ha come prima premessa la (4) e come seconda premessa la (1); questo secondo sillogismo conduce alla conclusione:

(5) Tutti i quadrupedi sono a sangue caldo.

Ma questa conclusione è certamente falsa, perché è la contraddittoria della seconda premessa (2) del sillogismo proposto; dunque è falsa una delle premesse del secondo sillogismo; non può essere la premessa (1), che è premessa del sillogismo proposto; quindi è falsa la (4), che è la contraddittoria della (3). Questa dunque risulta essere vera, perché la sua contraddittoria ha condotto all'assurdo.

Questo tipo di ragionamento è stato già analizzato da Aristotele, ed è utilizzato da Euclide nel suo trattato (di cui abbiamo detto) intitolato *Elementi*. In quest'opera si incontra per la prima volta questo tipo di ragionamento per dimostrare che, «se in un triangolo due angoli sono uguali tra loro, allora il triangolo è isoscele». Pure con un ragionamento di questo tipo Euclide giunge a dimostrare che «il numero dei numeri primi è infinito». A tal fine egli suppone che esista un numero primo che è il più grande di tutti, e da questa ipotesi deduce una contraddizione, perché egli dimostra che esiste un numero che è primo ed è maggiore di quello che è stato supposto essere il più grande tra tutti.

Diremo infine brevemente di alcune tecniche di dimostrazione che vengono impiegate in matematica e che vengono chiamate *dimostrazioni per induzione*.

Una dimostrazione per induzione è fondata su una proposizione che viene abitualmente chiamata *legge di induzione* e sulla validità e natura della quale sono sorte molte discussioni. Forse queste avevano la loro origine nella convinzione che il concetto di numero naturale fosse un «dato», un ente del quale la scienza doveva indagare le proprietà. A nostro parere, la posizione di

G. Peano su questo argomento è coerente con ciò che abbiamo detto nel precedente paragrafo a proposito della definizione implicita dei concetti fondamentali di una scienza; infatti Peano include la proposizione riguardante la legge di induzione nei postulati con i quali egli definisce il concetto di numero naturale. Pertanto, in questo ordine di idee, la legge di induzione è vista in certo modo come costitutiva di questo concetto.

Si osserva inoltre che non ha senso dire che questa proposizione, quando sia presa da sola, ed isolata dal contesto di una teoria, sia un postulato oppure un teorema; infatti nella trattazione, ormai classica, di Peano, essa non è dimostrabile in base alle precedenti, e quindi risulta essere una proposizione primitiva. Invece nella trattazione che M. Pieri dà dei fondamenti dell'aritmetica, costruita con postulati diversi da quelli di Peano, la legge di induzione viene dimostrata come un teorema.

Enunceremo qui la proposizione come viene enunciata da Peano. Per comprendere tale enunciato ricordiamo che questo Autore costruisce l'intera aritmetica definendo in forma implicita tre concetti con cinque postulati; i concetti sono: una classe, quella dei numeri naturali, che egli indica con il simbolo  $\mathbf{N}$ ; un elemento di questa classe, che egli indica con il simbolo 0 (zero); un operatore su elementi di  $\mathbf{N}$ , che sarà da noi indicato con il simbolo *succ*( $n$ ) (da leggersi *successore di n*); questo operatore fa corrispondere ad un numero  $n$  un altro numero, per l'appunto il successore di  $n$  nella serie dei numeri naturali.

Con questa nomenclatura, il postulato di induzione potrebbe essere enunciato nel modo seguente.

*Sia A una classe di numeri. Il numero 0 appartenga alla classe A; se, dalla ipotesi che un numero  $n$  appartiene ad A si dimostra che anche *succ*( $n$ ) appartiene ad A, allora ogni numero appartiene ad A.*

In altre parole, la classe A esaurisce l'insieme  $\mathbf{N}$  di tutti i numeri.

La stessa proposizione può essere enunciata in altra forma, per esempio parlando di proprietà invece che di classi. Si potrebbe quindi ottenere l'enunciato seguente.

*Se il numero 0 ha una certa proprietà e se, dalla ipotesi che essa sia posseduta da un numero  $n$  si dimostra che essa è posseduta anche da *succ*( $n$ ), allora la proprietà è posseduta da ogni numero.*

Peano riesce a dimostrare rigorosamente le proprietà formali delle operazioni dell'aritmetica fondandosi sui postulati che egli enuncia, ed in particolare sul postulato di induzione. Peano infatti definisce le operazioni dell'aritmetica in modo ricorsivo; il significato di questa espressione può essere compreso dagli esempi che seguono.

Per esempio, la definizione dell'operazione di addizione di due numeri,

indicata come al solito ponendo il segno « + » tra i simboli dei numeri stessi, viene data da Peano nel modo seguente.

Indicati con  $m$  ed  $n$  due numeri qualunque, si ha:

$$(6) \quad m + 0 = m,$$

$$(7) \quad m + \text{succ}(n) = \text{succ}(m + n).$$

In base alla definizione dell'operazione, data dalle formule (6) e (7), Peano dimostra le proprietà formali dell'addizione: commutativa ed associativa. Per esempio, la proprietà commutativa viene dimostrata in vari passi, il primo dei quali consiste nella dimostrazione della proprietà formale espressa dalla relazione:

$$(8) \quad 0 + m = m.$$

Secondo la legge di induzione, la validità della (8) per ogni  $m$  sarà garantita se, a partire dalla (8) stessa, si giungerà a dimostrare che si ha:

$$(9) \quad 0 + \text{succ}(m) = \text{succ}(m).$$

A tal fine si verifica anzitutto che la (8) è valida per  $m = 0$ ; infatti in tal caso la (8) si riduce alla:

$$(10) \quad 0 + 0 = 0,$$

che è vera in forza della (6) in cui si ponga  $m = 0$ . Ora per la (7) si ha:

$$(11) \quad 0 + \text{succ}(m) = \text{succ}(0 + m);$$

ma la (8) è stata accettata come vera per ipotesi; quindi al posto della (11) potremo scrivere la (9), che è la nostra tesi.

## 8. LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI. L'ANALISI E LA SINTESI

La deduzione, guidata dalla logica, è il momento fondamentale non solo della dimostrazione dei teoremi di matematica, ma anche della soluzione dei problemi e non soltanto di quelli di matematica.

La procedura della soluzione di un problema è stata già studiata dalla scienza greca; infatti Euclide, nel IV secolo avanti Cristo, scriveva:

[Si chiama] *analisi un procedimento in cui si ammette come vera una certa proposizione [che si vuole dimostrare] e si deduce da questa ipotesi una serie*

*di conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che è evidente, oppure è stata ammessa come vera.*

*[Si chiama] sintesi il procedimento con il quale, partendo da certe proposizioni accettate, si giunge ad una proposizione che si vuole dimostrare.*

E Proclo, matematico greco, qualche secolo dopo commenta:

*L'analisi dunque prende come punto di partenza ciò che si cerca, e da qui deduce le conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che è ammessa come vera; perché nella analisi noi accettiamo come dato ciò che vogliamo [dimostrare] e cerchiamo quali sono i fondamenti sui quali si basa, ed ancora i fondamenti dei fondamenti, e così via, fino a che riusciamo a giungere, in questo continuo cammino a ritroso, a qualche cosa che è già noto, o che appartiene alla classe dei primi principi; questo metodo noi lo chiamiamo analisi o soluzione con metodo retrogrado.*

*Nella sintesi invece, invertendo il procedimento, prendiamo come punto di partenza ciò a cui siamo arrivati con l'analisi, e via via, dimostrando come tesi quelle proposizioni che avevamo prese come ipotesi, e collegandole in ordine logico, giungiamo alla fine a costruire (o a dimostrare) ciò che si cercava.*

*Possiamo ora osservare che l'analisi può essere di due tipi: l'analisi di un primo tipo si prefigge come scopo la ricerca della verità, ed è pertanto chiamata teoretica; quella del secondo tipo ricerca ciò che ci viene proposto come scopo di un problema, e quindi viene chiamata problematica.*

*Pertanto, nell'analisi teoretica, noi ammettiamo ciò che si cerca come se fosse vero ed esistente, e da questa ipotesi passiamo alle successive conseguenze, che accettiamo come se fossero vere e stabilite, in virtù della ipotesi accettata come vera, fino a giungere a qualche proposizione che è ammessa come vera; allora:*

a) *se ciò che è ammesso come vero è realmente vero di fatto, allora ciò che cerchiamo di dimostrare è vero, e la dimostrazione di questo fatto potrà essere ottenuta invertendo l'ordine delle dimostrazioni; ma*

b) *se si giunge a qualche cosa che è stato accertato come falso, allora ciò significa che ciò che cerchiamo di dimostrare è falso.*

*Nella analisi problematica si immagina esistente l'ente che si vuole cercare o costruire, e da questa ipotesi si traggono le conseguenze, fino a che si giunge, per successivi passaggi logici, a qualche cosa che è stato accettato o ammesso; allora*

a) *se ciò che è stato accettato o ammesso esiste ed è effettivamente costruibile, cioè può essere considerato matematicamente come un «dato», allora ciò che è oggetto del problema è pure un ente che esiste; e la dimostrazione*

*di questo fatto si ottiene facendo al contrario le dimostrazioni svolte durante il procedimento di analisi; se invece*

*b) si giunge a qualche cosa che è chiaramente impossibile, anche il problema proposto non sarà risolubile.*

Fino a questo punto abbiamo citato il geometra greco; osserviamo ora che l'invenzione dei metodi che oggi vengono chiamati *geometria analitica* ha dato un aspetto particolare a questa problematica logica, collegandola con la problematica delle teorie fisico-matematiche della natura. Invero in una teoria cosiffatta la designazione degli enti che si studiano viene fatta con gli strumenti concettuali e linguistici della matematica, la formulazione delle ipotesi si traduce nella scrittura di relazioni (in particolare di equazioni) matematiche, la deduzione delle conseguenze dalle ipotesi formulate si riduce ad un calcolo, che utilizza le leggi sintattiche della matematica, in particolare le regole dell'algebra.

In questo ordine di idee, il procedimento di analisi e quello di sintesi, nella loro relazione con gli strumenti matematici, sono stati bene descritti da F. Enriques, il quale scrive:

*La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento «analitico» che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa «analisi» si comincia a supporre che il problema proposto  $P$  sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema  $R$  che si sappia risolvere. La «sintesi» consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema  $R$ , e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso fino a dimostrare la soluzione di  $P$ . Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di  $P$  sono soluzioni di  $R$ , ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi la quale — da sola — fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.*

*Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di risoluzione detto «dei luoghi geometrici» è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.*

*Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di «geometria analitica», e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di «analisi matematica». Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre a una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc. (Enciclopedia Italiana, Istituto G. Treccani, voce *Analisi*, vol. 3°, p. 86).*

Con la nomenclatura oggi comune, si potrebbe dire che ogni soluzione matematica di un problema geometrico o fisico deve essere accompagnata da una opportuna discussione; perché lo sviluppo dei calcoli può avere introdotto delle soluzioni estranee al problema considerato, oppure gli strumenti matematici utilizzati possono condurre a soluzioni che non hanno senso in relazione a quel particolare problema.

È facile osservare che il procedimento di analisi e di sintesi costituisce la procedura fondamentale non soltanto per risolvere in modo rigoroso e certo i problemi della geometria, ma anche per la spiegazione dei fenomeni naturali, per la costruzione delle teorie scientifiche, ed anche per la soluzione dei problemi che vengono posti da un ordinario libro giallo.

In quest'ultimo caso l'investigatore parte formulando alcune ipotesi (che nella fattispecie sono dei sospetti su determinate persone), ne deduce le conseguenze e le controlla con le prove e con gli indizi. Il colpevole viene identificato risalendo a ritroso, dalle condizioni necessarie fino alla soluzione del problema poliziesco.

## 9. ESERCIZI E COMPLEMENTI

**9.1.** Riacciacciandoci a ciò che è stato detto nel paragrafo 4, diamo qui di seguito l'elenco delle parole convenzionali che richiamano le forme di sillogismo riconosciute valide dalla logica medievale.

Della prima figura (il termine medio è soggetto in una delle premesse e predicato nell'altra):

*forme perfette:* BARBARA, CELARENT, DARI, FERIO;

*forme imperfette:* BARALIPTON, CELANTES, DABITIS, FAPESMO, FRISOMORUM.

Della seconda figura (il termine medio è predicato in entrambe le premesse): CESARE, CAMESTRES, FESTINO, BAROCO.

Della terza figura (il termine medio è soggetto in entrambe le premesse): DARAPTI, FELAPTON, DISAMIS, DATISI, BOCARDO, FERISON.

Nell'elenco precedente vi sono parole (come BARALIPTON e FRISESOMORUM) che hanno più di tre sillabe; ciò è dovuto probabilmente ad opportunità di memorizzazione; tuttavia, ai fini del significato convenzionale, si debbono prendere in considerazione soltanto le prime tre sillabe, e quindi le vocali che in esse compaiono.

Anche alcune consonanti che compaiono nelle parole convenzionali richiamano determinate operazioni logiche, con le quali le forme imperfette della prima figura o le forme della seconda e della terza possono essere ricondotte alle quattro forme perfette della prima figura. Il lettore potrà fare un utile esercizio costruendo degli esempi di sillogismo corrispondenti alle parole convenzionali che abbiamo riportato. Ritourneremo su questi argomenti nel capitolo seguente.

**9.2. ESERCIZIO 1.** Si consideri la seguente proposizione:

(P) Tutti i cinesi sono grassi.

Amnessa vera provvisoriamente questa proposizione, si dica quali delle frasi seguenti sono di conseguenza vere e quali non lo sono necessariamente:

- (1) Tizio è cinese, dunque è grasso.
- (2) Tizio è grasso, dunque è cinese.
- (3) Tizio non è cinese, dunque non è grasso.
- (4) Tizio non è grasso, dunque non è cinese.

**ESERCIZIO 2.** Siano A, B, C tre punti; si considerino le due proposizioni seguenti:

- (P) Il triangolo ABC è equilatero;  
(Q) Il triangolo ABC è equiangolo.

Si dimostra in geometria che le due proposizioni sono l'una conseguenza dell'altra, ovvero che il sussistere della P è condizione necessaria e sufficiente perché sussista la Q. Qual è l'ipotesi e qual è la tesi se si vuole dimostrare che P è necessaria per la Q? E qual è l'ipotesi e quale la tesi se si vuole dimostrare che P è condizione sufficiente per la Q?

**ESERCIZIO 3.** Il cubo di un numero naturale  $n$  ha come ultima cifra a destra 1. Si può dire che il numero  $n$  ha come ultima cifra a destra 1?

**ESERCIZIO 4.** Si ammetta vera la seguente proposizione:

Tutte le donne bionde sono belle.

Supponiamo anche che sia vera la seguente:

Tutte le egiziane sono brune.

Che cosa possiamo dedurre sulla bellezza delle egiziane?

**ESERCIZIO 5.** Dopo le elezioni politiche un elettore dice: «Tutte le persone oneste hanno votato per il partito X, che è risultato vincente. Io ho votato per il partito X, quindi sono onesto».

È legittima la conclusione?

**ESERCIZIO 6.** Dimostrare, con il metodo della riduzione all'assurdo, la validità del seguente ragionamento (che realizza uno schema indicato dalla parola simbolica FESTINO, di cui è detto sopra):

(1) Nessun uomo di razza gialla è calvo.

(2) Qualche milanese è calvo.

Dunque:

(3) Qualche milanese non è di razza gialla.

Per dimostrare che questo ragionamento è valido si può dimostrare che è falsa la contraddittoria della conclusione, cioè che è falsa la proposizione:

(4) Tutti i milanesi sono di razza gialla.

A tal fine si può costruire un sillogismo dello schema CELARENT, che ha come prima premessa la (1), e come seconda premessa la (4). Tale schema porta a concludere:

(5) Nessun milanese è calvo.

Ma questa conclusione è la contraddittoria della seconda premessa (2) del sillogismo proposto. Quindi si conclude che la (4) è falsa e di conseguenza che la (3), sua contraddittoria, è vera.

**9.3.** Un esempio molto noto e frequentemente citato di ragionamento per riduzione all'assurdo è fornito da un problema che viene spesso presentato come *problema dei tre capelli*, in numerosissime varianti, tutte equivalenti tra loro. Ne presentiamo qui una versione.

**PROBLEMA.** Un professore ha tre scolari, dei quali vuole saggiare l'intelligenza. Li fa sedere in una stanza priva di specchi su tre sgabelli, ai vertici di un triangolo equilatero, e li benda. Poi dice: «Io segnerò una croce verde oppure rossa sulla fronte di ciascuno di voi; poi toglierò le bende. Chi vede sulla fronte di almeno uno dei suoi compagni una croce verde è pregato di alzare la mano destra. Il primo che riesce a dimostrare con certezza di quale colore è la croce che si trova sulla propria fronte riceverà un premio».

Il professore segna una croce verde su ciascuna fronte, poi toglie le bende. Tre mani si alzano. Poi uno degli scolari dice: «Sulla mia fronte è tracciata una croce verde».

Si domanda di esporre il ragionamento fatto dallo scolaro vincente.



Indichiamo convenzionalmente con le lettere A, B, C i tre scolari, e sia A quello che ha parlato. Egli ha ragionato nel modo seguente.

Io vedo due croci verdi. Supponiamo che la mia croce sia rossa; questo non impedirebbe a B ed a C di alzare la mano, perché ognuno di essi vede una croce verde sulla fronte dell'altro. Ma se la mia croce fosse rossa allora B ragionerebbe così: «La mia croce è verde; infatti, se fosse rossa, C non avrebbe potuto alzare la mano, perché avrebbe visto due croci rosse: la mia (è B che parla) e quella di A». Quindi, se la mia croce fosse rossa (pensa A) B avrebbe potuto dedurre immediatamente che la sua è verde. Ma B non ha tratto la conclusione; ciò significa che la mia croce è verde.

Come si vede, il ragionamento di A è fondato anzitutto sulla presunzione che ognuno dei suoi compagni sia intelligente. A parte ciò, il ragionamento di A è un tipico ragionamento per assurdo, perché si svolge nel modo seguente: «Se fosse vera l'ipotesi H, allora avverrebbe T. Ma T non avviene, quindi l'ipotesi H non è vera».

La complicazione del gioco ora esposto sta nel fatto che A non soltanto deve fare questo ragionamento, ma deve anche presumere che uno dei suoi due concorrenti sia stato capace di farlo.

Altra variante del problema dei tre cappelli o dei tre segni sulla fronte, trattato ora è enunciata nel modo seguente.

Vi sono tre soggetti, che indicheremo con le lettere A, B, C, ed un operatore. Questi dispone di tre scatole e di cinque palline, delle quali tre sono bianche e due sono nere. L'operatore introduce una pallina in ogni scatola, ovviamente all'insaputa dei concorrenti, nasconde le due palline rimaste, e poi chiama i concorrenti ad aprire due tra le tre scatole, ed a determinare razionalmente il colore della pallina che è rimasta nella terza. Indichiamo convenzionalmente le scatole con i numeri 1, 2, 3. Il concorrente A apre le scatole 1 e 2, e non sa dire di quale colore è la pallina della 3. Le scatole vengono richiuse, il concorrente A non informa nessuno degli altri sul colore delle palline che ha visto. Viene chiamato il concorrente B, il quale apre le scatole 2 e 3 e non sa dire quale sia il colore della pallina nella scatola rimasta. B non informa nessuno del colore delle palline che ha visto. Infine viene chiamato C, il quale decide subito, senza aprire alcuna scatola, che in una certa scatola vi è una pallina, della quale egli sa dire il colore.

Di che scatola si tratta, e qual è il colore della pallina in essa contenuta?

**9.4. ESERCIZIO 7.** Invocando il principio di induzione, si dimostri il seguente teorema:

La somma dei primi  $n$  numeri naturali dispari è un quadrato.

**ESERCIZIO 8.** Siano A, B, C, D quattro punti di un piano. Si consideri il quadrilatero Q che ha come lati i segmenti AB, BC, CD, DA, ed ha come diagonali i segmenti AC e BD.

Sappiamo che se Q è un rettangolo le due diagonali sono uguali tra loro. Possiamo concludere che, se Q non è un rettangolo, allora le diagonali sono diverse? (Ricordiamo che dalla validità di un teorema non si può dedurre la validità del suo contrario; nel caso in esame, anche il trapezio isoscele è un quadrangolo che ha le diagonali uguali tra loro e che in generale, non è un rettangolo).

Possiamo concludere che, se le diagonali non sono uguali tra loro, Q non è un rettangolo? (Ricordiamo che un teorema ed il suo contronominale sono equivalenti).

**ESERCIZIO 9.** (Da Lewis Carroll). Quali conseguenze si possono trarre dalle proposizioni seguenti:

- (1) Nessuno si abbona a «The Times», a meno che non sia una persona colta.
- (2) Nessun porcospino sa leggere.
- (3) Coloro che non sanno leggere non sono persone colte.

Soluzione. Dalla (1) si trae:

- (4) Ogni abbonato a «The Times» è colto,

ovvero: condizione necessaria per essere abbonati a «The Times» è quella di essere colti.

Dalla (3) si trae analogamente che saper leggere è condizione necessaria per essere colti.

Quindi ogni abbonato a «The Times» deve essere colto, ed ogni persona colta deve saper leggere; ma (2) dice che i porcospini non sanno leggere. Quindi i porcospini non possono essere colti, ed a maggior ragione non possono essere abbonati a «The Times». Analogamente è vero che nessun abbonato a «The Times» è un porcospino.

**9.5.** Molto spesso, nelle argomentazioni, si presenta una coppia di proposizioni contraddittorie, dicendo che esse stabiliscono un *dilemma*; tale coppia di proposizioni viene anche presentata con l'espressione latina *aut aut*; era questa la coppia di congiunzioni con la quale i latini presentavano due proposizioni contraddittorie. È da osservarsi infatti che i latini, nella loro lingua, avevano la possibilità di distinguere la coppia di proposizioni che potevano essere vere contemporaneamente dalla coppia di proposizioni che si escludevano; nel primo caso usavano la congiunzione «vel», nel secondo usavano

le due congiunzioni «aut aut».

Si consideri per esempio il seguente discorso:

«Per riuscire nella vita bisogna essere bravi o fortunati».

In questo caso i latini usavano la congiunzione «vel», perché non si può escludere che si possa essere contemporaneamente bravi e fortunati.

Se invece si dicesse per esempio:

«Il tale deve essere portato qui vivo o morto»,

per tradurre in latino occorrerebbe ovviamente utilizzare la coppia di congiunzioni «aut aut», perché non è possibile che una persona sia al tempo stesso (fisicamente) viva e morta.

La presentazione di dilemmi può permettere di concludere sulla validità di certe proposizioni, come si vedrà dagli esempi seguenti.

«Per andare in America bisogna prendere una nave oppure un aereo; Tizio è andato in America e non ha preso una nave; quindi ha preso un aereo».

Questo dilemma viene chiamato *costruttivo*, perché permette di accertare la validità di una certa proposizione escludendo quella dell'altra che, con la prima, fornisce il dilemma.

È possibile tuttavia anche prendere in considerazione un *dilemma distruttivo*, come nel seguente esempio:

«Per andare in America è necessario prendere una nave oppure un aereo. Tizio non ha preso né navi né aerei; quindi non è potuto andare in America».

Ovviamente, in questo caso, perché la validità della conclusione sia accertata, occorre che sia accertato il fatto che la enumerazione dei casi considerati sia completa, e quindi esaurisca tutte le possibilità.

È rimasto infatti celebre il dilemma in base al quale pare che un certo Califfo abbia fatto bruciare la famosa biblioteca di Alessandria:

«I libri contenuti in questa biblioteca o sono favorevoli al Corano o gli sono contrari. Nel primo caso sono inutili, perché ci basta il Corano; quindi debbono essere distrutti; nel secondo caso sono cattivi, quindi debbono essere distrutti».

Probabilmente il buon Califfo non aveva pensato che la sua enumerazione lasciava scoperto l'insieme dei libri che non hanno nulla a che vedere con il Corano, per esempio i libri di geometria.

Spesso si utilizzano anche argomenti in cui si prendono in considerazione più di due proposizioni che si escludono a vicenda.

Si consideri il seguente esempio di polemica politica (non corretta né troppo serena).

«Chi milita nel partito X (ovviamente avversario di chi parla) non può essere contemporaneamente una persona corretta ed intelligente.

Infatti:

a) se milita nel partito X ed è una persona corretta, non può essere intelligente;

b) se milita nel partito X ed è una persona intelligente non può essere persona corretta.

Infine:

c) se è persona corretta ed intelligente non può militare nel partito X».

**9.6.** Nel paragrafo 8 abbiamo parlato dei procedimenti di analisi e di sintesi per la soluzione di problemi logici, ed in particolare di problemi matematici. In questo secondo caso abbiamo osservato che il procedimento di sintesi si realizza abitualmente con una operazione logica che oggi viene chiamata *discussione*. Si consideri l'esempio seguente.

**PROBLEMA.** Un uomo nell'anno 1947 aveva un'età data dalla somma delle cifre della sua data di nascita. Trovare tale data.

Indichiamo con  $z$  l'età dell'uomo nel 1947, ed indichiamo con  $x$  ed  $y$  rispettivamente le ultime due cifre a destra del numero che dà la data di nascita cercata. Questa sarà dunque rappresentata dal numero:

$$1900 + 10x + y,$$

e si avrà:

$$(1) \quad 1947 = 1900 + 10x + y + z.$$

D'altra parte si deve anche avere:

$$(2) \quad z = 1 + 9 + x + y.$$

Dalle due equazioni (1) e (2) si trae, con pochi calcoli, l'equazione seguente:

$$(3) \quad 11x + 2y = 37.$$

Questa equazione è stata dedotta dalle (1) e (2) ed è quindi condizione necessaria perché queste possano sussistere; l'operazione logica di analisi finisce dunque con la ricerca delle soluzioni della (3) che siano numeri interi.

Tali soluzioni sono date dagli infiniti numeri interi espressi dalle formule:

$$(4) \quad x = 3 + 2k; \quad y = 2 - 11k$$

dove  $k$  è un intero qualunque.

L'operazione, che i classici chiamavano sintesi e che, con linguaggio moderno, potrebbe essere chiamata discussione, porta a scegliere quale numero, o quali numeri, tra quelli dati dalle (4), soddisfino alle condizioni del problema; condizioni le quali impongono ovviamente che i numeri in (4) siano rappresentabili con una sola cifra e siano non soltanto interi, ma positivi.

Si constata facilmente che queste condizioni sono soddisfatte soltanto per  $k = 0$ .

Quindi la data di nascita cercata è 1932, e l'uomo aveva 15 anni nel 1947.

## 2. TEORIA INTUITIVA DEGLI INSIEMI ED ELEMENTI DI ALGEBRA DI BOOLE

### 1. SULLA DEFINIZIONE DEL CONCETTO DI INSIEME

Nel seguito utilizzeremo il termine *insieme*, che è ormai entrato nell'uso comune; richiamiamo qui ciò che è stato detto nel paragrafo 6 del capitolo 1, a proposito dei termini che si assumono come primitivi, e sulla loro definizione. Infatti, ripetiamo, si legge spesso la frase seguente:

«Insieme è una collezione di enti considerati come un tutto unico».

Nel paragrafo citato abbiamo già osservato che, pronunciando questa frase, si accetta ovviamente come noto il significato del termine *collezione*; di conseguenza il problema della definizione del termine *insieme* non è risolto, ma soltanto spostato. Noi assumeremo come *primitivo* il termine *insieme*, e ci limiteremo ad enunciare dei sinonimi del termine stesso, come classe, collezione, famiglia ecc., ed a constatare che l'ascoltatore o il lettore utilizza il termine nello stesso modo in cui lo utilizziamo noi.

Per simbolizzare gli insiemi utilizzeremo qui le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: A, B, C ...

Considereremo noto anche il significato di una espressione come la seguente:

*x è un elemento dell'insieme A,*

o anche:

*x appartiene all'insieme A,*

o di frasi analoghe.

La relazione di appartenenza di un elemento di nome *x* all'insieme di nome A viene di solito espressa con una formula del tipo:

$$(1) \quad x \in A,$$

da leggersi «*x appartiene ad A*» o anche «*x è un elemento di A*» o con frasi

analoghe. Il simbolo « $\epsilon$ » è stato introdotto dal matematico italiano G. Peano (di cui abbiamo già detto nel citato paragrafo 6 del capitolo 1), ed è simile alla lettera greca epsilon, che è iniziale della terza persona del tempo presente del verbo greco che significa «essere».

Dati due insiemi A e B, se avviene che ogni elemento di uno sia anche elemento dell'altro e viceversa, si usa scrivere:

$$(2) \quad A = B,$$

leggendo «A è uguale a B» oppure «A coincide con B» o con altre frasi analoghe.

Così, per esempio, se indichiamo con A l'insieme dei triangoli equilateri e con B l'insieme dei triangoli equiangoli, il teorema di geometria elementare euclidea, il quale afferma che ogni triangolo equilatero è anche equiangolo e viceversa, ci autorizza a scrivere la (2).

Accetteremo dall'intuizione il fatto che per la relazione di uguaglianza, espressa dalla (2), valgano le proprietà che sussistono per la relazione di uguaglianza utilizzata in matematica. Tali proprietà sono espresse dalle formule seguenti, ed hanno dei nomi classici:

$$(3) \quad A = A \text{ (proprietà riflessiva);}$$

$$(4) \quad \text{se } A = B, \text{ allora } B = A \text{ (proprietà simmetrica);}$$

$$(5) \quad \text{se } A = B \text{ ed anche } B = C, \text{ allora } A = C \text{ (proprietà transitiva).}$$

Utilizzando anche qui una nomenclatura che abbiamo già adottato in precedenza (si veda il paragrafo 2 del capitolo 1), diremo che i simboli A, B, C ... sono *categorematici*; con questo intendiamo dire che essi hanno dei significati anche quando siano presi da soli, senza che debbano necessariamente essere accompagnati da altri. Invece, per esempio, il simbolo « $=$ » sarà detto *sincategorematico*; infatti esso non ha significato se preso singolarmente, ma deve sempre essere scritto tra i simboli di due insiemi, ed in tal caso significa che questi hanno gli stessi elementi.

Se tra due insiemi non sussiste la (2), scriveremo convenzionalmente:

$$(6) \quad A \neq B,$$

leggendo con la frase «A è diverso da B» o con frasi analoghe.

Ammetteremo che le due proposizioni espresse dalla (2) e dalla (6) siano tra loro contraddittorie; ciò significa che una almeno di esse deve essere vera, ed una soltanto. Quindi dalla verità o falsità di una di esse si potrà dedurre la falsità o rispettivamente la verità dell'altra.

Per determinare praticamente un insieme è possibile talvolta redigere un'anagrafe, un elenco dei suoi elementi. Abitualmente a tal fine si scrivono i nomi degli elementi stessi tra parentesi; per esempio, indicando con V l'insieme delle vocali della lingua italiana, si può scrivere:

$$(7) \quad V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Tuttavia questa procedura non è valida per tutti gli insiemi; diremo che un insieme per il quale è possibile redigere un elenco dei suoi elementi è un *insieme finito*. Ma non è detto che un insieme qualunque abbia questa proprietà; per esempio, l'insieme dei numeri naturali non è finito, perché non è possibile redigere un elenco di tutti i numeri: tale elenco infatti non finirebbe mai. Lo stesso avviene, come abbiamo già detto nel paragrafo 7 del capitolo precedente, per l'insieme dei numeri primi.

In questi casi si suol dire che l'insieme in questione è *infinito*, e per definirlo occorre ovviamente seguire procedure diverse da quelle che servono per determinare un insieme finito.

Osserviamo che è possibile pensare ad un insieme che possenga un unico elemento; se  $x$  è tale elemento, seguendo la convenzione di cui abbiamo detto poco sopra, l'insieme stesso potrà essere indicato con il simbolo:

$$(8) \quad \{x\};$$

un insieme cosiffatto viene chiamato anche *singoletto* (singleton in inglese). Ovviamente, seguendo le convenzioni adottate, potremo scrivere:

$$(9) \quad x \in \{x\}.$$

Infine prenderemo in considerazione anche l'insieme che non ha alcun elemento; diremo che esso è l'*insieme vuoto* (o anche la *classe vuota*) e lo indicheremo con il simbolo:

$$(10) \quad \phi$$

analogo al simbolo del numero zero; ricordiamo tuttavia che i due concetti sono diversi, anche se tra loro esiste una certa analogia.

## 2. INTERSEZIONE E SUE PROPRIETÀ FORMALI

Siano ora dati due insiemi A e B. Accetteremo come evidente il fatto che gli elementi che appartengono ad entrambi costituiscano un insieme, che ver-



rà chiamato *intersezione* dei due, e sarà indicato con il simbolo:

$$(1) \quad A \cap B,$$

leggendo «*A intersezione B*»; analogamente il simbolo sincategorematico « $\cap$ » verrà chiamato simbolo di intersezione, ed intersezione verrà pure chiamata l'operazione logica che conduce dai due insiemi *A* e *B* all'insieme indicato nella (1).

Se non esistono elementi comuni ai due insiemi, indicheremo questo fatto scrivendo:

$$(2) \quad A \cap B = \phi.$$

Accetteremo come evidente il fatto che il risultato dell'operazione di intersezione non dipenda dall'ordine in cui i due insiemi sono presentati ed enunciati; ciò sarà espresso con la formula:

$$(3) \quad A \cap B = B \cap A.$$

Ovviamente questa formula non enuncia una proprietà dei due insiemi, ma dell'operazione di intersezione; quindi si vuol dire che la (3) esprime una *proprietà formale* dell'intersezione, proprietà che viene chiamata *commutativa*, con espressione analoga a quella impiegata per certe operazioni dell'aritmetica e dell'algebra.

D'ora innanzi, nella scrittura delle formule, accetteremo come valide le convenzioni sull'uso delle parentesi che sono adottate dall'algebra; quindi converremo che l'insieme di simboli contenuti tra due parentesi, l'una aperta e la prima chiusa che la segue, debba essere considerato come un tutto unico.

Con queste convenzioni potremo esprimere le altre leggi delle operazioni sugli insiemi con formule analoghe a quelle che si scrivono per le espressioni algebriche.

Accetteremo inoltre dall'intuizione che per l'operazione di intersezione valga la proprietà seguente:

$$(4) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Si vuol dire che questa formula esprime la proprietà *associativa* dell'operazione di intersezione. In forza di questa proprietà saremo autorizzati d'ora innanzi, a scrivere semplicemente:

$$(5) \quad A \cap B \cap C$$

per indicare l'intersezione di tre insiemi, senza che occorra precisare, mediante parentesi, in quale ordine sono eseguite le operazioni parziali. In modo analogo si definisce e si simbolizza l'intersezione di più insiemi.

In particolare, in seguito alla definizione, si ha:

$$(6) \quad A \cap A = A;$$

si vuol dire che questa formula esprime la proprietà di *idempotenza* dell'operazione di intersezione.

Si ha ancora, dalla definizione:

$$(7) \quad A \cap \phi = \phi.$$

Supponiamo ora che si abbia:

$$(8) \quad A \cap B \neq \phi,$$

allora si conclude che non può essere:

$$(9) \quad A = \phi.$$

Infatti, se fosse vera la (9), in forza della (7) si avrebbe la (2). Ma, in base a ciò che è stato detto, la (2) e la (8) sono da considerarsi contraddittorie tra loro, tali cioè che se l'una è vera, l'altra è necessariamente falsa, e viceversa; segue quindi che non può essere vera la (9). È facile osservare che il ragionamento ora svolto costituisce un caso particolare di dimostrazione per assurdo, di cui abbiamo parlato nel paragrafo 7 del capitolo precedente.

Siano ora dati due insiemi A e B, e supponiamo che ogni elemento di A sia anche elemento di B; si vuol esprimere questo fatto dicendo che A è un *sottoinsieme* di B. In base alla definizione dell'operazione di intersezione possiamo esprimere questa circostanza scrivendo:

$$(10) \quad A \cap B = A.$$

Il fatto che A sia sottoinsieme di B non esclude ovviamente che i due insiemi coincidano, cioè che tra essi sussista la relazione simboleggiata dalla (2) del paragrafo precedente. Quando avviene che, oltre al fatto che valga la (10), esista qualche elemento di B che non appartiene all'insieme A, si vuol dire che A è un *sottoinsieme in senso proprio* di B o brevemente che A è un *sottoinsieme proprio* di B.

Così, rifacendoci ad un esempio già considerato, potremo dire che l'insieme dei triangoli equiangoli è un sottoinsieme dell'insieme dei triangoli equi-

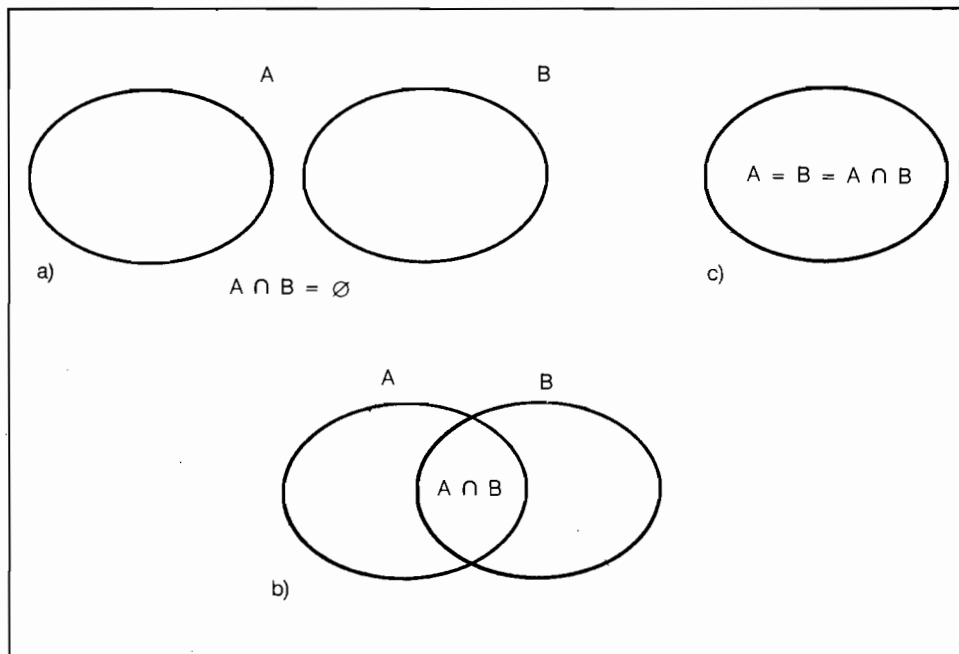
lateri, perché i due insiemi coincidono; e diremo anche che l'insieme dei triangoli è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei poligoni piani, perché ovviamente ogni triangolo è un poligono, ma esistono anche dei poligoni piani che non sono triangoli.

In particolare, se nella (10) è:

$$(11) \quad B = \phi,$$

vale la (7). Con la nomenclatura adottata qui, si può quindi dire che l'insieme vuoto è sottoinsieme di un qualunque altro insieme.

Le relazioni logiche di cui abbiamo detto finora sono spesso illustrate in forma grafica, con certe figure che vengono chiamate *diagrammi di Eulero-Venn*, dai nomi del grande matematico Eulero e del logico Venn che le utilizzarono nelle loro ricerche di logica. Con queste figure convenzionali si suole rappresentare un insieme (ovviamente non vuoto) immaginando che i suoi elementi siano rappresentati dai punti interni ad una figura piana limitata da un contorno chiuso, che abbia per esempio la forma di un cerchio, o di una ellisse, o di un quadrato, o altre forme. Allora l'operazione di intersezione di due insiemi potrebbe essere illustrata, nei vari casi, da figure come le seguenti.



### 3. UNIONE E COMPLEMENTAZIONE RISPETTO AD UN UNIVERSO

Siano dati due insiemi A e B; accetteremo ancora dall'intuizione che gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi costituiscano un insieme, che viene chiamato *unione* dei due insiemi dati, ed indicato con il simbolo:

$$(1) \quad A \cup B,$$

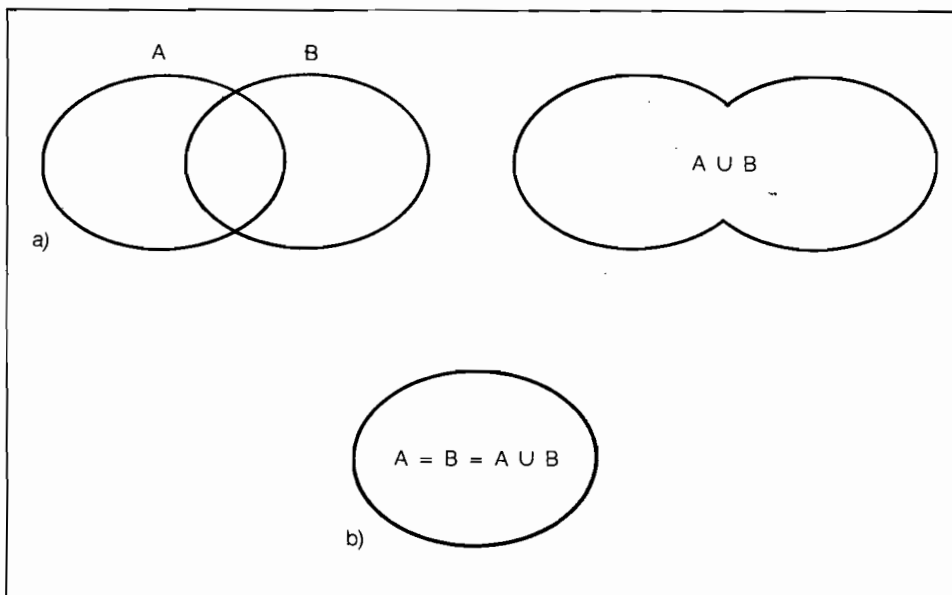
leggendo «A unione B».

Indicheremo con lo stesso vocabolo *unione* anche l'operazione logica che conduce all'insieme indicato dalla (1); anche in questo caso accetteremo dall'intuizione la validità della proprietà *commutativa*, che è espressa dalla formula:

$$(2) \quad A \cup B = B \cup A;$$

ed analogamente accetteremo che valga la proprietà *associativa*, espressa dalla formula:

$$(3) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$



La proprietà (3) ci autorizzerà a scrivere semplicemente:

$$(4) \quad A \cup B \cup C,$$

quando si debba prendere in considerazione l'unione di tre o più insiemi, senza che sia necessario precisare con parentesi quale delle operazioni viene eseguita prima dell'altra.

Inoltre accettiamo che sia valida la proprietà di *idempotenza*, espressa dalla formula:

$$(5) \quad A \cup A = A.$$

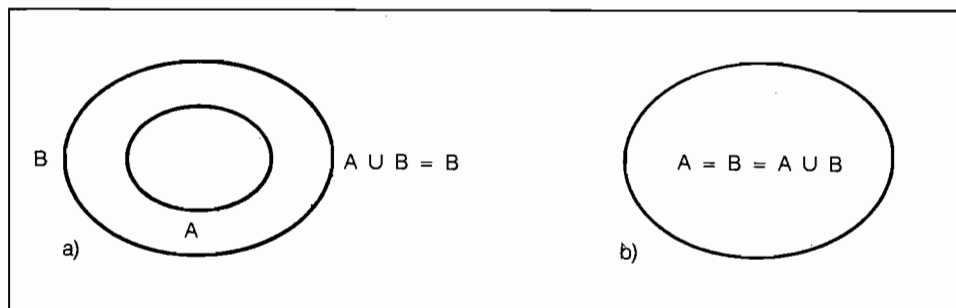
Infine è chiaro che si ha:

$$(6) \quad A \cup \phi = A.$$

Siano ora dati due insiemi A e B, e si supponga che A sia un sottoinsieme di B. Ricordando la definizione di unione di due insiemi, ed eventualmente aiutandosi con le rappresentazioni convenzionali dei diagrammi di Eulero - Venn, si giunge a scrivere in questo caso:

$$(7) \quad A \cup B = B.$$

È chiaro che questa relazione è valida anche nel caso in cui i due insiemi siano coincidenti.



Abbiamo già espresso in altro modo, con la (10) del paragrafo precedente, il fatto che l'insieme A sia sottoinsieme dell'insieme B; dimostreremo che le due formule sono equivalenti, cioè che una di esse si può dedurre dall'altra mediante certe operazioni che studieremo in seguito.

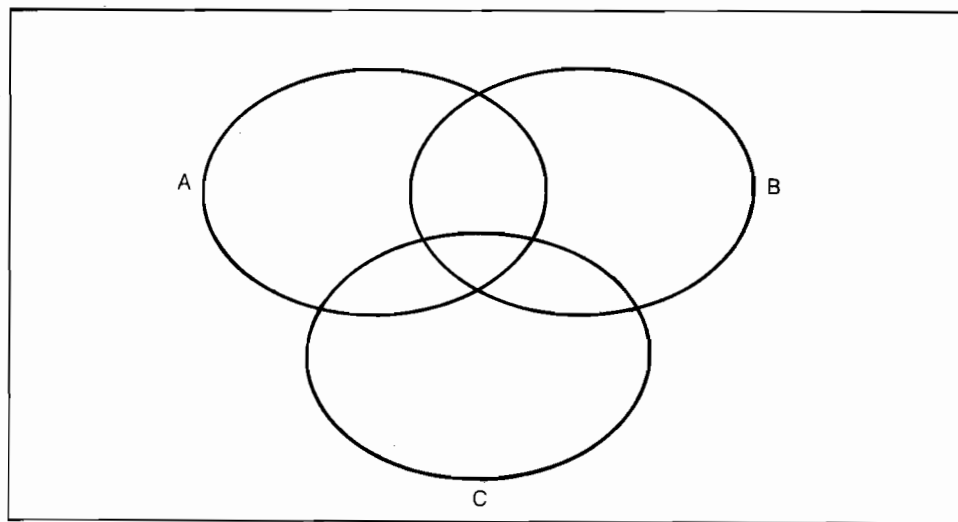
Ancora su esempi immediati, e sulle illustrazioni date dai diagrammi di Eulero-Venn, ci si può accertare della validità delle proprietà delle due operazioni, di intersezione e di unione, che sono espresse dalle formule seguenti:

$$(8) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$(9) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Si suol dire che la formula (8) esprime la proprietà *distributiva dell'operazione di intersezione rispetto a quella di unione*; e che la formula (9) esprime la proprietà *distributiva dell'operazione di unione rispetto a quella di intersezione*.

Tali proprietà sono illustrate dalle figure annesse, a proposito delle quali osserviamo che esse non possono venir considerate come il fondamento di una dimostrazione logicamente rigorosa, ma soltanto come un comodo richiamo ad una vaga intuizione geometrica.



Valgono infine le due formule seguenti:

$$(10) \quad A \cap (A \cup B) = A,$$

$$(11) \quad A \cup (A \cap B) = A,$$

le quali esprimono delle proprietà che vengono ricordate con l'espressione *leggi di assorbimento*.

D'ora innanzi, ogni volta che parleremo di insiemi, intenderemo riferirci a sottoinsiemi di un determinato insieme, che chiameremo convenzionalmente *universo*, e che indicheremo con il simbolo  $U$ .

Tale termine *universo* non vuole avere un significato assoluto, valido in ogni caso; tuttavia l'esistenza di un insieme universo sarà sempre supposta, anche se non sarà esplicitamente annunciata di volta in volta; ma la natura dell'universo sarà facilmente deducibile dal contesto. Così, per esempio, se si parla di numeri, l'universo può essere l'insieme di tutti i numeri interi, oppure di tutti i numeri razionali ecc. Se si sta parlando di zoologia, l'universo può essere quello di tutti gli animali della Terra, e così via.

Consideriamo un insieme  $A$ , come un sottoinsieme di un determinato universo  $U$ . Accettiamo dall'intuizione il fatto che tutti gli elementi dell'universo  $U$  che non appartengono ad  $A$  costituiscano un insieme, che verrà chiamato *complementare* di  $A$ , rispetto all'universo considerato  $U$ , e verrà indicato con il simbolo:

$$(12) \quad A',$$

leggendo «*complementare di A*» oppure anche, brevemente, «*non A*».

Pertanto si può pensare che il simbolo (12) definisca una operazione sugli insiemi, operazione che verrà chiamata *complementazione*, e che fa passare da un insieme  $A$  al suo complementare, ripetiamo, rispetto all'universo considerato.

Accettiamo dall'intuizione che valga per l'operazione di complementazione la seguente legge formale:

$$(13) \quad (A')' = A,$$

che viene anche chiamata *legge della doppia complementazione*, e che è analoga alla legge della doppia negazione, valida in molte lingue. Valgono inoltre le seguenti proprietà, che vengono chiamate *leggi di De Morgan*, dal nome del logico inglese che le ritrovò, e le enunciò esplicitamente nel secolo scorso:

$$(14) \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$(15) \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Si conviene poi che le leggi di De Morgan, applicate in particolare all'insieme vuoto ed all'insieme universo, assumano le forme particolari seguenti:

$$(16) \quad \phi' = U,$$

$$(17) \quad U' = \phi.$$

Si ha infine, per ogni insieme A:

$$(18) \quad A \cup A' = U,$$

$$(19) \quad A \cap A' = \phi.$$

Riassumiamo le leggi delle operazioni sugli insiemi nella seguente tabella.

TABELLA 1

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI SUGLI INSIEMI	
<b>Proprietà commutativa:</b>	$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A.$
<b>Proprietà associativa:</b>	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
<b>Proprietà distributiva:</b>	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
<b>Proprietà di idempotenza:</b>	$A \cap A = A; \quad A \cup A = A.$
<b>Proprietà di assorbimento:</b>	$A \cap (A \cup B) = A; \quad A \cup (A \cap B) = A.$
<b>Legge della doppia complementazione:</b>	$(A')' = A.$
<b>Leggi di De Morgan:</b>	$(A \cap B)' = A' \cup B'; \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$
<b>Proprietà dell'insieme vuoto e dell'insieme universo:</b>	$A \cap \phi = \phi; \quad A \cup \phi = A; \quad A \cup A' = U; \quad U' = \phi;$ $A \cap U = A; \quad A \cup U = U; \quad A \cap A' = \phi; \quad \phi' = U.$



#### 4. FORMULE BEN FORMATE E REGOLE DI TRASFORMAZIONE

A partire dalle formule che abbiamo dato nei paragrafi precedenti, accettate come valide, si possono costruire altre formule pure valide, con regole che presenteremo tra poco; molte delle formule che troveremo traducono simbolicamente delle procedure abituali di ragionamento e di deduzione.

Le leggi espresse dalle formule nella tabella 1 sono analoghe alle leggi fondamentali dell'algebra; e le regole che enunceremo sono pure analoghe a quelle che vengono applicate nei calcoli algebrici. Si costruisce così una dottrina che viene chiamata abitualmente *algebra di Boole*, nella quale si adottano dei procedimenti simili, per quanto non perfettamente uguali, a quelli dell'algebra abituale, che studia le proprietà delle operazioni sui numeri.

Nel linguaggio comune l'abitudine ci insegna a distinguere le successioni di lettere e di parole che, come si suol dire, hanno un senso, cioè comunicano dei concetti; in altre parole, nel linguaggio verbale naturale è spesso lasciato all'intuizione ed al senso comune il giudizio sul fatto che una certa successione di segni abbia un senso oppure no. Invece quando, per rappresentare i concetti e le relazioni tra essi, non si usa il linguaggio comune, ma si adottano dei simboli convenzionali, è necessario stabilire delle regole per poter determinare quali simboli singoli o quali successioni di simboli sono accettati nel linguaggio convenzionale che si costruisce. A tal fine introduciamo qui anzitutto il concetto di *formula ben formata*, espressione che sarà abbreviata convenzionalmente con la sigla *fbf*.

Osserviamo che una procedura simile deve essere seguita anche in matematica. Per esempio, tutti sanno che la formula seguente:

$$(2 * (13 + 17) + 24) / 12$$

indica un numero ben determinato, e precisamente il 7; invece, per esempio, la seguente successione di simboli:

$$/ 4 +$$

non ha significato in matematica (ciò non esclude tuttavia che abbia significato in qualche altro linguaggio convenzionale).

Si introduce il *concetto di fbf* con la seguente definizione.

*Si dirà che una successione di simboli, contenente simboli categorematici, ed eventualmente anche simboli sincategorematici, è una fbf se essa si può pensare ottenuta con le seguenti procedure, a partire dai singoli simboli categorematici:*

a) ogni singolo simbolo categorematico è una fbf;

- b) se  $M$  è una fbf, allora anche  $M'$  è una fbf;
- c) se  $M$  ed  $N$  sono fbf, allora anche  $M \cap N$  ed  $M \cup N$  sono fbf;
- d) nessun'altra successione di simboli è una fbf.

Come abbiamo già avvertito, nella scrittura delle formule dell'algebra di Boole adotteremo le convenzioni sull'impiego delle parentesi che sono adottate abitualmente nelle formule matematiche; quindi in particolare converremo che l'insieme dei simboli contenuti tra due parentesi, l'una aperta e la prima chiusa che la segue, debba essere una fbf ed essere considerato come un tutto unico.

Supponiamo ora data una espressione simbolica, realizzata scrivendo una relazione di uguaglianza tra due fbf. Riterremo che da tale uguaglianza se ne possano dedurre altre con le seguenti *regole di trasformazione*.

i) Sostituendo, al posto di un singolo simbolo categorematico, ovunque esso compaia, un altro simbolo.

Così, per esempio, supposta data l'uguaglianza:

$$(1) \quad A \cap B = B \cap A,$$

saremo autorizzati a scrivere:

$$(2) \quad A \cap C = C \cap A,$$

sostituendo la lettera maiuscola  $C$  al posto della  $B$ , in ogni posto che era occupato da quest'ultima lettera nella formula (1).

ii) Sostituendo, al posto di un simbolo categorematico, una intera fbf, ovunque il simbolo si incontri.

Così, per esempio, data la (1), potremo scrivere la:

$$(3) \quad A \cap (B \cap C) = (B \cap C) \cap A,$$

sostituendo nella (1) la fbf  $(B \cap C)$  al posto della lettera  $B$ .

iii) Sostituendo, al posto di un simbolo categorematico, l'uno oppure l'altro membro di una uguaglianza che è stata stabilita in precedenza.

Così, per esempio, se supponiamo di aver già stabilito che la (1) è valida, dalla (3) potremo dedurre la:

$$(4) \quad (A \cap B) \cap (B \cap C) = (B \cap C) \cap (B \cap A),$$

sostituendo nella (3), al posto di  $A$ , una volta l'uno ed una volta l'altro dei due membri della uguaglianza (1).

iv) Operando, su entrambi i membri di una uguaglianza, una medesima operazione di intersezione, o di unione, o di complementazione.

Così, per esempio, accettata la (1) come vera, accetteremo come vere anche le formule seguenti:

$$(5) \quad (A \cap B) \cap C = (B \cap A) \cap C,$$

$$(6) \quad (A \cap B) \cup C = (B \cap A) \cup C,$$

$$(7) \quad (A \cap B)' = (B \cap A)'.$$

Supponiamo ora di aver stabilito o accettato la validità di un certo sistema S di uguaglianze. Ogni formula che si ottiene da quelle del sistema S con l'applicazione delle regole ora enunciate si dirà *conseguenza* del sistema S; la costruzione di una nuova formula si potrà anche chiamare *deduzione* e tale formula si potrà dire *dedotta* dal sistema S considerato.

Diremo che due formule F e G sono *equivalenti* rispetto ad un sistema S di formule, se dal sistema S e da F si può dedurre la G, e viceversa da S e da G si può dedurre la F.

## 5. ESPRESSIONI DELLE PROPOSIZIONI FONDAMENTALI DELLA LOGICA CLASSICA

Applicheremo le regole presentate nei paragrafi precedenti alla simbolizzazione di alcune proposizioni fondamentali della logica classica, che abbiamo preso in considerazione nel capitolo 1. Anzitutto daremo qui di seguito vari modi per tradurre le proposizioni universali, affermativa e negativa.

### 1) *Proposizioni del tipo A:*

«Ogni elemento dell'insieme S è anche elemento dell'insieme P»,  
oppure anche, brevemente:

«Ogni S è un P»,

oppure anche:

«Tutti gli S sono dei P».

$$(1) \quad S \cap P = S;$$

$$(2) \quad S \cup P = P;$$

$$(3) \quad S' \cup P' = S';$$

$$(4) \quad S' \cap P' = P';$$

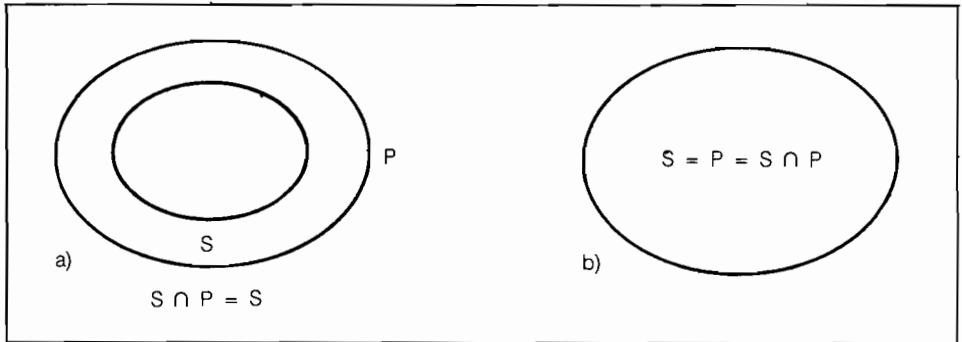
$$(5) \quad S \cap P' = \phi.$$

OSSERVAZIONE. Le (1) e (3) si ottengono l'una dall'altra con le leggi di De Morgan e la regola della doppia complementazione; analogamente la (2) e la (4). La (2) si ottiene dalla (1) operando su entrambi i membri con « $\cup P$ » ed applicando una legge di assorbimento; analogamente la (1) si ottiene dalla (2) operando su entrambi i membri con « $\cap P$ » ed applicando una legge di assorbimento. La (5) si ottiene dalla (1) operando su entrambi i membri con « $\cap P'$ ». Infine la (1) si ottiene dalla (5) tenendo conto della:

$$S \cap (P \cup P') = S$$

ed applicando le proprietà formali delle operazioni.

Le possibili situazioni simbolizzate dalla formula (1) e dalle altre equivalenti possono essere illustrate dai seguenti diagrammi.



## 2) Proposizioni del tipo E:

«Nessun elemento dell'insieme S appartiene all'insieme P»

oppure anche, brevemente:

«Nessun S è un P».

- |      |                    |
|------|--------------------|
| (6)  | $S \cap P = \phi;$ |
| (7)  | $S \cap P' = S;$   |
| (8)  | $S \cup P' = P';$  |
| (9)  | $S' \cap P = P;$   |
| (10) | $S' \cup P = S'.$  |

OSSERVAZIONE. La (10) e la (7) si ottengono l'una dall'altra applicando le leggi di De Morgan; analogamente la (8) e la (9) si ottengono l'una dall'altra

applicando le leggi di De Morgan. La (8) si ottiene dalla (7) operando su entrambi i membri con « $\cup P'$ » ed applicando le leggi di assorbimento; la (7) si ottiene dalla (8) operando su entrambi i membri con « $\cap S$ » ed applicando le leggi di assorbimento. La (6) si ottiene dalla (7) operando su entrambi i membri con « $\cap P$ » e tenendo conto della:

$$P \cap P' = \phi.$$

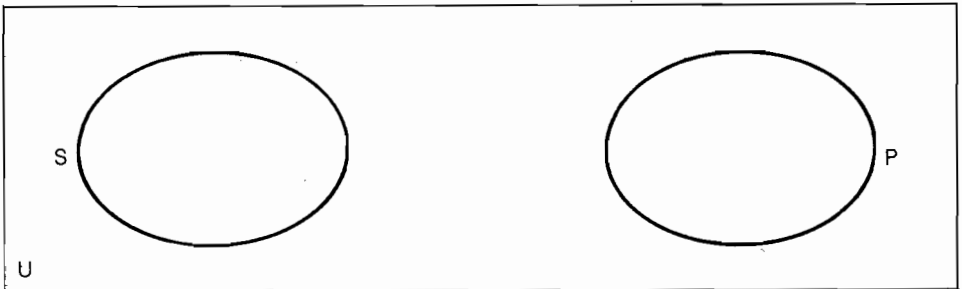
Infine la (7) si ottiene dalla (6) e dalla:

$$S \cap (P \cup P') = S,$$

osservando che valgono:

$$P \cup P' = U, \quad S \cap U = S.$$

Le possibili situazioni simbolizzate dalla (6) e dalle equivalenti possono essere illustrate con la figura seguente.



## 6. GLI SCHEMI FONDAMENTALI DI DEDUZIONE

Le regole di trasformazione che abbiamo enunciato nei paragrafi precedenti permettono di tradurre in simboli gli schemi di ragionamento che la logica classica presentava con l'ausilio delle lingue naturali.

Consideriamo tre insiemi che chiameremo con i nomi M, P, S; presenteremo qui alcune relazioni fra questi insiemi, e daremo le traduzioni verbali di tali relazioni.

A questo scopo presenteremo tre schemi di ragionamento; in ognuno di essi enunceremo due formule, che considereremo come premesse, ed una terza che può essere dedotta come conseguenza delle prime due, mediante le regole di trasformazione di cui abbiamo detto, oppure con ulteriori ragiona-

menti, i quali si basano su certe ipotesi; queste saranno da noi esplicitamente enunciate, mentre nei ragionamenti esposti verbalmente sono supposte naturalmente valide e pertanto sono sottintese, come abbiamo già osservato nel paragrafo 3 del capitolo 1.

— *Primo schema:*

- (1)  $M \cap P = M$   
 (2)  $S \cap M = S$   
 (3)  $S \cap P = S.$

Si può ottenere la (3) dalle prime due, operando su entrambi i membri della (1) con « $\cap S$ » e tenendo conto della (2).

— *Secondo schema:*

- (4)  $M \cap P = M$   
 (5)  $S \cap M \neq \phi$   
 (6)  $S \cap P \neq \phi.$

La (6) può essere dedotta dalle (4) e (5) ricordando ciò che è stato detto nel paragrafo 2 di questo capitolo; precisamente dalla (5) si ha anzitutto che non può essere:

- (7)  $S = \phi;$

operando poi su entrambi i membri della (4) con « $\cap S$ » si giunge alla:

- (8)  $(S \cap P) \cap M \neq \phi;$

ed applicando una seconda volta il ragionamento esposto nel paragrafo 2 si ottiene la (6).

— *Terzo schema:*

- (9)  $M \cap P = M$   
 (10)  $M \cap S = M$   
 (11)  $M \neq \phi$   
 (12)  $S \cap P \neq \phi.$

Operando su entrambi i membri della (9) con « $\cap S$ », tenendo conto della (10) e ricordando il ragionamento più volte richiamato, si ottiene la (12).

Gli schemi di deduzione che abbiamo presentato qui possono servire per tradurre in forma simbolica i sillogismi che abbiamo presentato nel capitolo 1.

A tal fine richiamiamo ciò che abbiamo detto sopra, nel precedente paragrafo 5; ricordando ciò che abbiamo esposto in tale occasione, possiamo dire che le formule (1), (2), (3) possono essere lette del modo seguente:

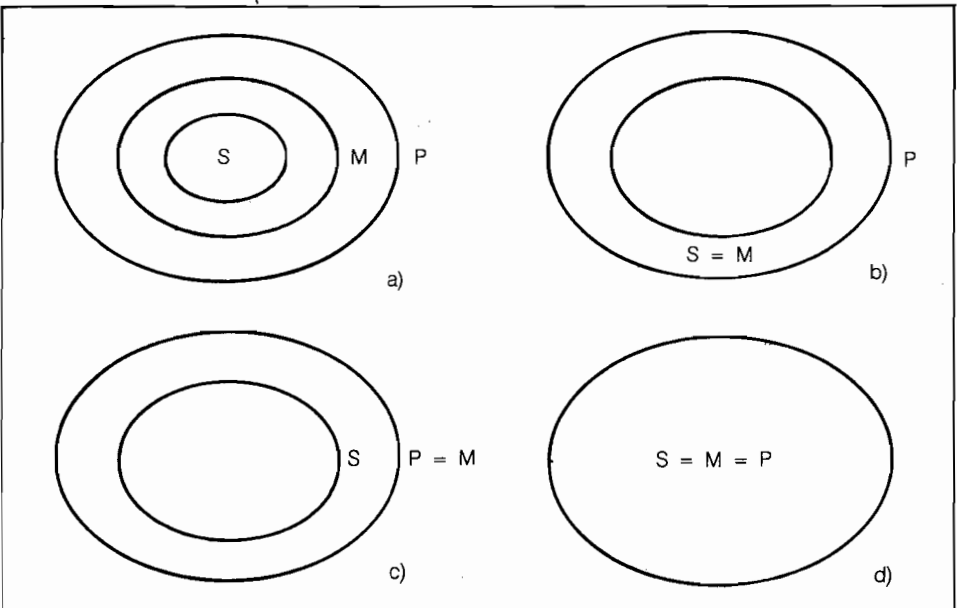
(13) Ogni (elemento dell'insieme)  $M$  è un (elemento dell'insieme)  $P$ .

(14) Ogni  $S$  è un  $M$ .

Dunque:

(15) Ogni  $S$  è un  $P$ .

Ovviamente le formule del primo schema sono valide anche nel caso in cui sia  $S = \phi$ . Se supponiamo che l'insieme  $S$  non sia vuoto, si verifica immediatamente che le frasi ora enunciate corrispondono allo schema di sillogismo indicato con la parola convenzionale BARBARA, forma perfetta della prima figura, presentato nel paragrafo 4 del capitolo 1. Le relazioni tra gli insiemi  $S, P, M$ , tradotte con il primo schema, possono essere rappresentate convenzionalmente con uno dei diagrammi seguenti.



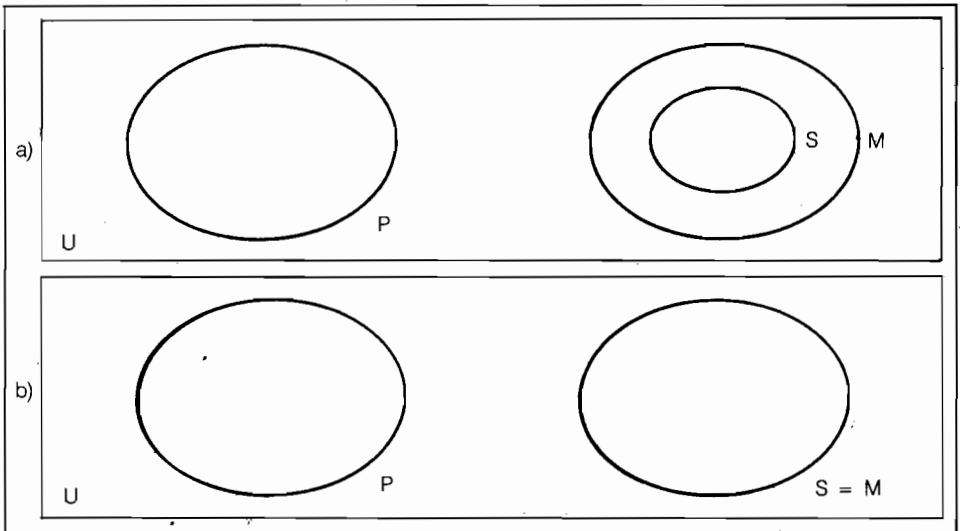
Sostituiamo ora, nelle formule del primo schema, il simbolo P con il simbolo P'; si ottengono le formule:

- (16)  $M \cap P' = M$
- (17)  $S \cap M = S$
- (18)  $S \cap P' = S.$

Ricordando ciò che è stato detto nel paragrafo precedente, queste formule possono essere lette con le frasi seguenti:

- (19) Nessun M è un P.
- (20) Ogni S è un M.
- Dunque:
- (21) Nessun S è un P.

Si constata immediatamente che le frasi precedenti corrispondono allo schema di sillogismo indicato con la parola convenzionale CELARENT, forma perfetta della prima figura, presentato nel paragrafo 4 del capitolo 1. Alcune possibili relazioni fra i tre insiemi S, M, P, supposti non vuoti, che corrispondono al caso ora considerato, possono essere illustrate convenzionalmente con le figure seguenti.

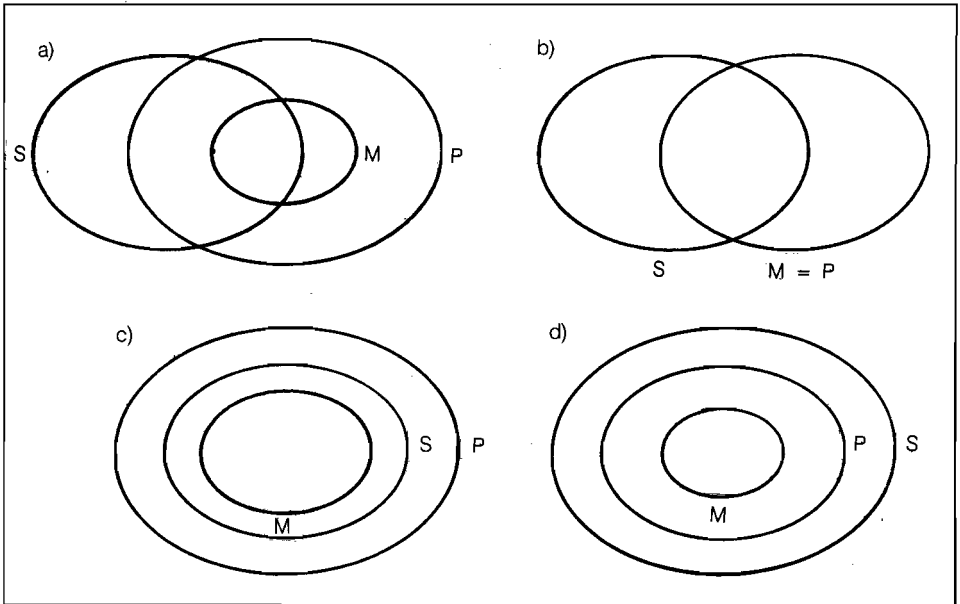




Consideriamo ora il secondo schema; le formule (4), (5), (6) possono essere lette con le frasi seguenti:

- (22) Ogni M è un P.
- (23) Alcuni S sono degli M.
- Dunque:
- (24) Alcuni S sono dei P.

Si constata immediatamente che le frasi precedenti corrispondono allo schema di sillogismo indicato con la parola convenzionale DARII, forma perfetta della prima figura, presentato nel paragrafo 4 del capitolo 1. Alcune possibili situazioni, che realizzano lo schema ora ricordato, possono essere tradotte graficamente ed illustrate convenzionalmente con i diagrammi seguenti.



Infine nel terzo schema sostituendo P con P', si ottengono le formule:

- (25)  $M \cap P' = M$
- (26)  $S \cap M \neq \phi$
- (27)  $S \cap P' \neq \phi$ .

Ancora ricordando ciò che è stato detto nel precedente paragrafo 5, le formule precedenti possono essere lette nel modo seguente:

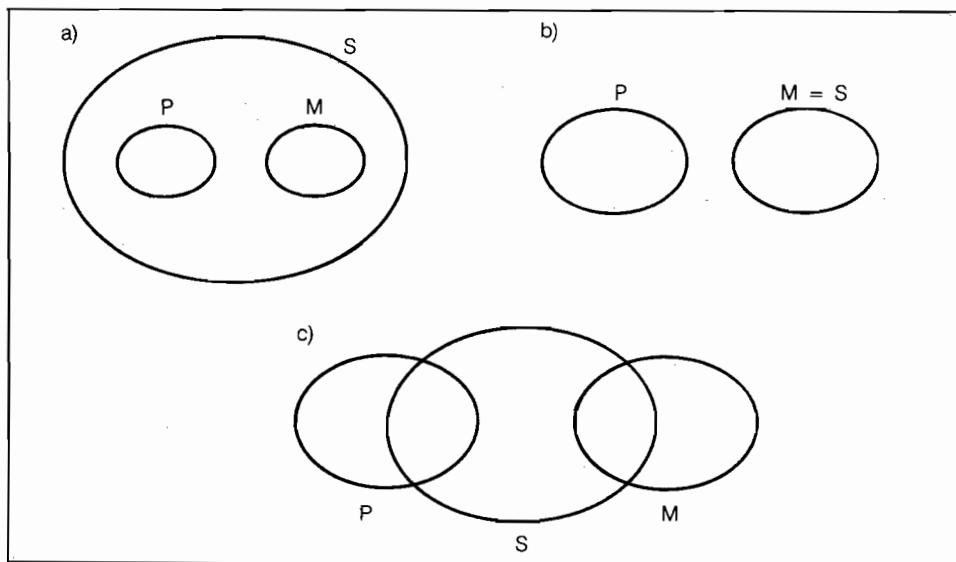
(28) Nessun M è un P.

(29) Alcuni S sono degli M.

Dunque:

(30) Alcuni S non sono dei P.

Si verifica immediatamente che le frasi precedenti realizzano lo schema di sillogismo indicato dalla parola convenzionale FERIO, forma perfetta della prima figura, presentato nel paragrafo 4 del capitolo 1. Alcune possibili situazioni, che realizzano lo schema ora ricordato, possono essere tradotte graficamente e illustrate convenzionalmente con le figure seguenti.



## 7. ALTRE OPERAZIONI DELL'ALGEBRA DI BOOLE E FORME CANONICHE

Le regole dell'algebra di Boole che abbiamo esposto nei paragrafi precedenti permettono di esprimere anche altre relazioni tra insiemi ed altre operazioni su di essi; daremo qui di seguito qualche esempio di utilizzazione di questi simbolismi, impiegandoli per esprimere alcune operazioni logiche che si eseguono spesso.

Dati due insiemi A e B, entrambi non vuoti, si suole indicare con il simbolo:

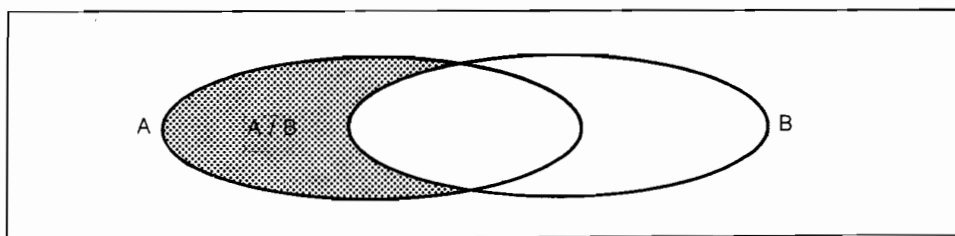
$$(1) \quad A \setminus B,$$

da leggersi «A meno B», l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B. Si ha quindi, per definizione:

$$(2) \quad A \setminus B = A \cap B'$$

e l'operazione indicata dal simbolo (1) viene chiamata, con una espressione non molto felice, *sottrazione insiemistica*.

L'insieme che è il risultato di tale operazione può essere rappresentato convenzionalmente con la parte tratteggiata del diagramma seguente.



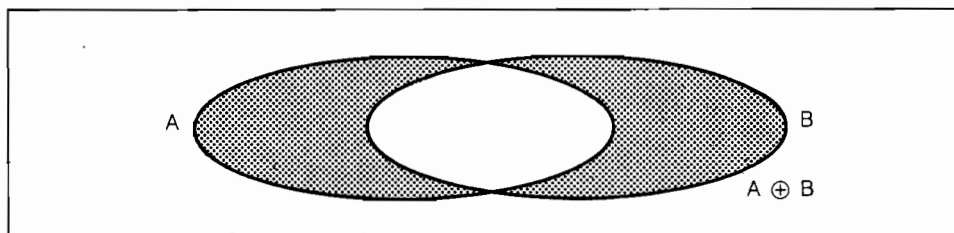
Ancora, dati due insiemi A e B, si suole indicare con il simbolo:

$$(3) \quad A \oplus B,$$

da leggersi «A somma B» o con altre espressioni analoghe, l'insieme definito dalla formula seguente:

$$(4) \quad A \oplus B = (A \cap B') \cup (A' \cap B).$$

Tale insieme può essere rappresentato convenzionalmente con la parte tratteggiata del seguente diagramma.



Con parole si potrebbe definire l'*insieme somma* di due insiemi come quello costituito dagli elementi che appartengono ad uno solo di essi.

Si verifica che per l'operazione indicata con il simbolo  $\oplus$  valgono le proprietà formali espresse dalle formule seguenti:

$$(5) \quad A \oplus A = \phi;$$

$$(6) \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

Si pone infine il problema della riduzione ad una forma canonica delle espressioni dell'algebra di Boole; questa operazione risulta utile in molti casi: per esempio per poter riconoscere se due espressioni, esteriormente diverse tra loro, rappresentino il medesimo insieme.

Una procedura per ridurre una espressione dell'algebra di Boole ad una forma canonica può essere quella di applicare ripetutamente, in opportuna successione, le proprietà formali delle operazioni dell'algebra di Boole, e precisamente le leggi di De Morgan e le proprietà associativa, commutativa e distributiva delle operazioni di intersezione e di unione. Non svilupperemo qui la teoria nei suoi dettagli, e ci limiteremo a presentare succintamente alcuni risultati. In base a questi, se in una espressione dell'algebra di Boole sono presenti  $n$  simboli categorematici (ognuno dei quali rappresenta un insieme), l'espressione stessa può essere ricondotta ad una forma canonica costituita dall'unione di formule ben formate, racchiuse tra parentesi; ognuna di queste formule ben formate espressa dall'intersezione di  $n$  simboli categorematici, oppure dei simboli stessi complementati.

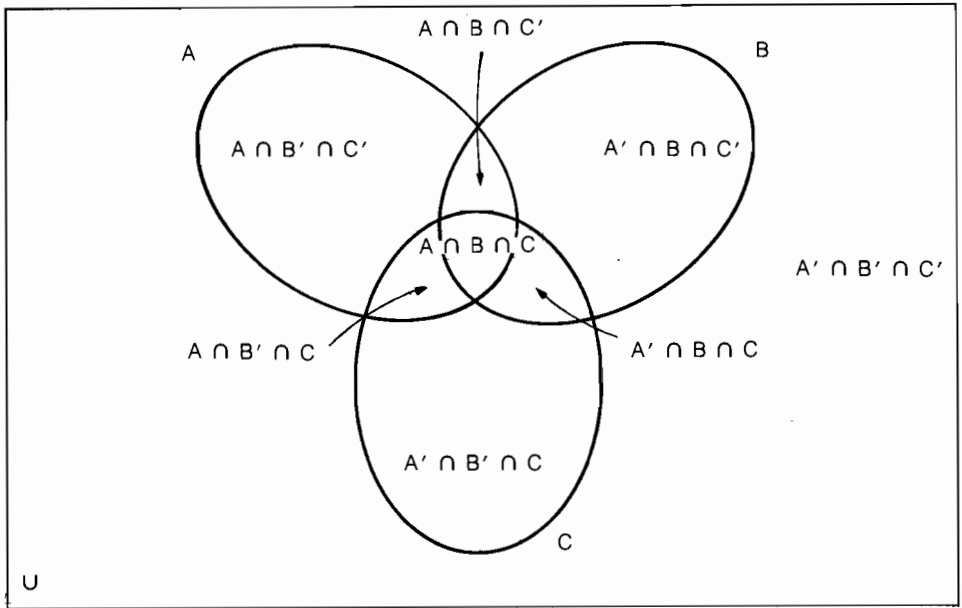
Così, per esempio, una espressione dell'algebra di Boole che riguarda tre simboli categorematici:  $A, B, C$ , può essere ricondotta all'unione di certe formule ben formate, ognuna delle quali è racchiusa in parentesi; in ognuna delle parentesi è contenuta l'intersezione di tutti e tre i simboli  $A, B, C$  o delle loro complementazioni.

Nel caso in esame le formule ben formate contenute nelle parentesi possono quindi essere soltanto le seguenti:

$A \cap B \cap C$	$A' \cap B \cap C$
$A \cap B \cap C'$	$A' \cap B \cap C'$
$A \cap B' \cap C$	$A' \cap B' \cap C$
$A \cap B' \cap C'$	$A' \cap B' \cap C'$

La suddivisione dell'intero universo  $U$ , che scaturisce dalla presenza dei tre insiemi  $A, B, C$  e delle loro intersezioni a due a due ed a tre a tre in tutti

i modi possibili può essere illustrata simbolicamente dalla figura seguente, che presenta il caso in cui nessuno degli insiemi intersezione è vuoto.



Altri casi possono essere costruiti per esercizio, sulla base dei principi che abbiamo esposto e che reggono queste rappresentazioni convenzionali.

## 8. CENNO SUI DIAGRAMMI DI LEWIS CARROLL

Le convenzioni per la rappresentazione grafica, esposte nei paragrafi precedenti per illustrare le relazioni logiche tra insiemi appartenenti ad un medesimo universo, non sono le sole che sono state escogitate ed impiegate. Spesso, per rappresentare le relazioni tra due insiemi e i loro complementari, si utilizzano altre convenzioni, che vanno sotto il nome di *diagrammi di Carroll*, perché sono state inventate dal noto matematico inglese che scriveva sotto il nome d'arte di Lewis Carroll.

Con queste convenzioni, dati due insiemi A e B di un medesimo universo U, questo può essere suddiviso in quattro sottoinsiemi, secondo una partizione che è illustrata dal diagramma seguente, il quale presenta in altro modo le relazioni tra insiemi che sono state illustrate nei paragrafi precedenti.

Con le convenzioni di Carroll, la ripartizione dell'universo viene simbolizzata graficamente mediante la suddivisione di una figura rettangolare in quattro regioni; nei riquadri di sinistra sono simbolizzati gli elementi di  $U$  che appartengono all'insieme  $A$ , in quelli di destra gli elementi di  $U$  che appartengono all'insieme complementare  $A'$ ; analogamente nei riquadri superiori sono rappresentati gli elementi di  $U$  che appartengono all'insieme  $B$ , nei riquadri inferiori gli elementi di  $U$  che appartengono all'insieme complementare  $B'$ .

Si ottiene così una rappresentazione grafica convenzionale del tipo seguente:

$A$	$A'$	
$A \cap B$	$A' \cap B$	$B$
$A \cap B'$	$A' \cap B'$	$B'$

la quale illustra la partizione dell'universo dato secondo i criteri di cui abbiamo detto.

Per esempio, supponiamo di prendere in considerazione l'universo costituito dall'insieme di tutti i numeri naturali. Sia  $A$  l'insieme dei numeri pari,  $B$  l'insieme dei multipli di 5. Allora nei riquadri di sinistra staranno tutti i numeri pari, nei riquadri in alto tutti i multipli di 5. Quindi nel riquadro in alto a sinistra staranno tutti i multipli di 10.

È facile collegare i diagrammi di Carroll e l'impiego dei simboli finora utilizzati.

Nel caso in esame, l'insieme dato dai punti che stanno nell'angolo in alto a sinistra del diagramma di Carroll viene rappresentato con il simbolo  $A \cap B$ ; l'insieme dato dai punti che stanno in alto a destra viene rappresentato con il simbolo  $A' \cap B$ . L'insieme dato dai punti che stanno nell'angolo in basso a sinistra del diagramma di Carroll viene rappresentato con il simbolo  $A \cap B'$ . Infine l'insieme dato dai punti che stanno nell'angolo in basso a destra del diagramma di Carroll viene rappresentato dal simbolo  $A' \cap B'$ .

## 9. ESERCIZI E COMPLEMENTI

**9.1.** È noto che il concetto di *insieme finito*, di cui abbiamo detto nel paragrafo 1 di questo capitolo, è strettamente collegato con il concetto di numero naturale. Non intendiamo approfondire qui l'argomento, e pertanto ci limitiamo a ricordare che alla domanda «Quanti sono gli elementi di un dato

insieme (finito)  $A$ ?» si risponde con un numero naturale. Ricordiamo inoltre che si conviene di associare il numero zero dell'insieme dei numeri naturali all'insieme vuoto; è questa una delle analogie tra i due concetti di cui abbiamo detto (nel paragrafo 1 citato).

Consideriamo un insieme finito  $A$ , ed indichiamo con il simbolo:

$$(1) \quad N(A),$$

da leggersi, per esempio, «*numero degli elementi di  $A$* », il numero naturale corrispondente; sia poi  $B$  un altro insieme finito. Se i due insiemi  $A$  e  $B$  non hanno elementi in comune, cioè se si ha:

$$(2) \quad A \cap B = \phi,$$

all'operazione di unione dei due insiemi  $A$  e  $B$ , che porta alla considerazione dell'insieme simbolizzato dalla:

$$(3) \quad A \cup B,$$

corrisponde l'operazione di addizione dei due numeri corrispondenti. Possiamo quindi scrivere, beninteso nell'ipotesi (2):

$$(4) \quad N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

ESERCIZIO 1. Se l'ipotesi (2) non è valida, si verifichi che vale la formula:

$$(5) \quad N(A \cup B) + N(A \cap B) = N(A) + N(B).$$

Questa formula potrebbe quindi essere considerata come l'estensione della formula elementare (4) al caso in cui la (2) non sia valida, e quindi i due insiemi considerati abbiano qualche elemento in comune.

La (5) deve essere impiegata in molti casi, in cui occorra classificare gli elementi di un universo secondo caratteri tra loro diversi.

A titolo di esempio presentiamo una versione di un esercizio elementare che viene spesso proposto in varie forme.

«Da un torpedone in sosta sono scesi 38 turisti, che sono entrati in un bar: 5 di essi non fecero consumazioni al banco;

23 presero un caffè;

17 consumarono delle paste.

Quanti turisti consumarono caffè e paste?».

La risposta si ottiene applicando la (5) all'insieme di  $38 - 5 = 33$  turisti che hanno consumato qualche cosa. Indichiamo con  $A$  l'insieme dei turisti

che hanno preso il caffè, e con B l'insieme dei turisti che hanno consumato delle paste. Da ciò che abbiamo detto sopra si ha:

$$(6) \quad N(A \cup B) = 33$$

e dai dati del problema e dalla (5) si ottiene:

$$(7) \quad N(A \cap B) = 7.$$

Lo stesso problema può essere risolto applicando la tecnica dei diagrammi di Carroll (di cui abbiamo detto al paragrafo 8) che risultano particolarmente utili per simbolizzare la partizione degli elementi di un universo secondo due caratteri, come in questo caso. Il confronto tra le due procedure (che portano ovviamente allo stesso risultato) costituirà un utile esercizio per il lettore.

**ESERCIZIO 2.** Si considerino tre insiemi finiti: A, B, C. Mantenendo le notazioni introdotte sopra, si dimostri che vale la formula:

$$(8) \quad N(A \cup B \cup C) + N(A \cap B) + N(B \cap C) + N(C \cap A) = \\ = N(A) + N(B) + N(C) + N(A \cap B \cap C).$$

**9.2. ESERCIZIO.** Si dia la dimostrazione delle formule (5) e (6) del paragrafo 7.

**9.3.** Nel paragrafo 7 abbiamo visto che le formule ben formate che si ottengono con l'operazione di intersezione su tre simboli categorematici o sui loro complementi sono in numero di 8.

Sia  $n$  un intero naturale, e sia  $2^n$  la potenza  $n$ -esima di 2.

Si dimostri che il numero delle fbf che si ottengono con l'operazione di intersezione eseguita su  $n$  simboli categorematici e sulle loro complementazioni è  $2^n$ .

In conseguenza di questo risultato, si dimostri che il numero delle forme canoniche delle espressioni di algebra di Boole che coinvolgono  $n$  simboli categorematici e sono diverse tra loro è  $2^{2^n} - 1$ .

Per esempio, dati due simboli categorematici A e B, le fbf che si possono ottenere con l'operazione di intersezione eseguita su questi simboli e sui loro complementi sono le quattro seguenti:

$$A \cap B; \quad A \cap B'; \quad A' \cap B; \quad A' \cap B'.$$

Le forme canoniche di espressioni che contengono i due simboli dati si ottengono operando con l'operazione di unione su queste fbf in tutti i modi



possibili. Ora ciò è possibile in 15 modi; infatti vi sono quattro espressioni che si ottengono dalle fbf prese isolatamente, sei espressioni che si ottengono operando l'unione di due tra esse, quattro espressioni che si ottengono con l'unione di tre, ed infine una che si ottiene con l'operazione di unione eseguita su tutte e quattro le fbf.

9.4. In relazione agli schemi fondamentali di deduzione esposti nel paragrafo 6, si verifichi che nel secondo schema rientrano alcuni tipi di sillogismi che corrispondono ad alcune parole convenzionali, di quelle che abbiamo ricordato nel paragrafo 9 del capitolo 1.

In particolare, se nelle formule (4), (5), (6) del paragrafo 6, che traducono simbolicamente il secondo schema, sostituiamo P con S ed S con P', otteniamo lo schema seguente:

$$(9) \quad M \cap S = M$$

$$(10) \quad M \cap P' \neq \phi$$

$$(11) \quad \frac{M \cap P' \neq \phi}{S \cap P' \neq \phi}$$

Per esempio, indicando con M l'insieme dei lombardi, con S l'insieme degli italiani, con P l'insieme degli uomini biondi, dalle (9), (10), (11) si ottiene il sillogismo (dello schema BOCARDO della terza figura):

Tutti i lombardi sono italiani.

Alcuni lombardi non sono biondi.

Dunque:

Alcuni italiani non sono biondi.

Analogamente, ancora prendendo in considerazione le formule (4), (5), (6) del paragrafo 6, che traducono il secondo schema di ragionamento, e sostituendo in esse P con P' ed M con M', si ottengono le formule seguenti:

$$(12) \quad P' \cap M' = M'$$

$$(13) \quad S \cap M' \neq \phi$$

$$(14) \quad \frac{S \cap M' \neq \phi}{S \cap P' \neq \phi}$$

Per esempio, indicando con P l'insieme dei lombardi, con M l'insieme degli italiani, e con S l'insieme degli uomini biondi, e ricordando ciò che è stato

detto del paragrafo 5, possiamo leggere la formula (12) con la frase:

Tutti i lombardi sono italiani.

E la formula (13) può essere letta con la frase:

Alcuni (uomini) biondi non sono italiani.

Infine la (14), conclusione del ragionamento, può essere letta:

Alcuni (uomini) biondi non sono lombardi,

oppure anche:

Alcuni lombardi non sono biondi.

Il sillogismo ora presentato viene considerato dalla logica classica come appartenente allo schema BAROCO della seconda figura.

**9.5.** Facciamo riferimento al terzo schema, presentato nel paragrafo 6. Si considerino le formule (9) e (10) dello stesso paragrafo, insieme con l'ipotesi espressa dalla (11). Un esempio di ragionamento che segue lo schema ricordato può essere offerto dal ragionamento seguente:

Tutti gli svedesi sono biondi.

Tutti gli svedesi sono alti.

Dunque, nella ipotesi che esistano degli svedesi:

Alcuni (uomini) biondi sono alti,

oppure anche:

Alcuni (uomini) alti sono biondi.

Il sillogismo ora presentato viene considerato dalla logica classica come appartenente allo schema DARAPTI della terza figura.

Se, nelle formule (9), (10), (12) del paragrafo 6 ricordato, sostituiamo P con P', otteniamo lo schema di ragionamento rappresentato dalle formule seguenti:

$$(15) \quad M \cap P' = M,$$

$$(16) \quad S \cap M = M,$$

nella ipotesi che sia anche:

$$(17) \quad M \neq \phi,$$

si ottiene:

$$(18) \quad S \cap P' \neq \phi.$$

Per esempio, sia  $P$  l'insieme degli uomini biondi, sia  $M$  l'insieme dei siciliani, e sia  $S$  l'insieme degli italiani. Allora le formule (15), (16), (18) possono essere lette con le frasi seguenti:

Nessun siciliano è biondo.

Tutti i siciliani sono italiani.

Dunque, nell'ipotesi che esistano dei siciliani:

Qualche italiano non è biondo.

Il sillogismo ora presentato viene considerato dalla logica classica come appartenente allo schema FELAPTON della terza figura.

La costruzione dei sillogismi che corrispondono alle parole convenzionali da noi ricordate nel paragrafo 9.1 del capitolo precedente, e l'illustrazione dei rapporti logici con diagrammi di Eulero-Venn, saranno un utile esercizio per il lettore.

### 3. CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI E DEI PREDICATI

#### 1. PROPOSIZIONI NON ANALIZZATE E VALORI DI VERITÀ

Nei precedenti capitoli abbiamo visto alcune procedure di deduzione che si avvalgono del linguaggio comune oppure dell'algebra di Boole applicata alla teoria intuitiva ed acritica degli insiemi. Vogliamo ora occuparci brevemente di altre procedure, e precisamente di quelle che vengono abitualmente classificate con l'espressione *calcolo delle proposizioni non analizzate*. A questo proposito ricordiamo che nei precedenti capitoli abbiamo dovuto in qualche modo distinguere in una proposizione alcuni suoi elementi: per esempio il soggetto, il predicato, e, quando necessario, altri termini categorematici e sin-categorematici. D'ora innanzi invece prenderemo ogni proposizione come un tutto unico, e ci interesseremo esclusivamente al suo valore di verità.

Nel capitolo precedente abbiamo convenuto di indicare con lettere maiuscole dell'alfabeto latino gli insiemi. In questo capitolo invece converremo di indicare con le singole lettere maiuscole dell'alfabeto latino, per esempio:

(1) A, B, C ...

le proposizioni non analizzate. Ciò non costituisce una contraddizione, perché, come abbiamo già detto nel capitolo 1, la definizione dei simboli è fornita esclusivamente dalle regole con le quali si opera su di essi.

Per indicare il valore di verità di una data proposizione, cioè il fatto che essa sia vera oppure falsa, vengono adottate varie convenzioni; per esempio il fatto che una proposizione sia vera viene indicato da alcuni Autori con la lettera V oppure con la lettera T (iniziale della parola inglese «true» che significa appunto vero); ed il fatto che la proposizione sia falsa viene indicato con la lettera F. Noi utilizzeremo qui dei simboli numerici, e precisamente indicheremo con il simbolo 1 (uno) il fatto che una proposizione sia vera e con il simbolo 0 (zero) il fatto che essa sia falsa. Converremo anche di associare ad ogni lettera maiuscola che indica una proposizione la corrisponden-

te lettera minuscola, per indicare il suo valore di verità. Così per esempio, se abbiamo indicato con A, B, C ... certe proposizioni, indicheremo rispettivamente con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ... i numeri che forniscono i loro valori di verità. Pertanto scrivendo, per esempio:

$$(2) \qquad a = 1,$$

indicheremo che il valore di verità della proposizione indicata con A vale 1, e quindi esprimeremo il fatto che la proposizione stessa è vera.

A questo proposito si può osservare che anche la (2) può essere considerata come una proposizione; quindi anche ad una espressione come la (2) potrebbe essere attribuito un valore di verità. Tuttavia noi converremo che le proposizioni come la (2), che assegnano valori di verità ad altre proposizioni, siano sempre da considerarsi come vere. Questa convenzione mira ad evitare che con questo simbolismo si possano costruire delle situazioni paradossali, come quella che si incontrerebbe con le considerazioni seguenti. Indichiamo con B la proposizione (2) e sia  $b$  il suo valore di verità. Se ora immaginiamo che la proposizione A sia la seguente:

$$(3) \qquad b = 0,$$

abbiamo costruito un esempio del classico *paradosso del mentitore* che era già noto alla sofistica greca; cioè abbiamo costruito una situazione nella quale una proposizione risulta essere vera soltanto quando è falsa e viceversa; come avviene quando si pronuncia una frase come la seguente: «io mento».

Le proposizioni singole, elementari e non analizzate cioè senza che si riconosca in ognuna di esse un soggetto, un predicato ecc., verranno anche chiamate convenzionalmente, per comodità, *proposizioni atomiche*, per distinguerle da altre proposizioni, che verranno costruite mediante i simboli di queste proposizioni e altri simboli chiamati *connettivi*. Ovviamente il simbolo di una singola proposizione atomica ha significato per se stesso, preso singolarmente; esso quindi sarà considerato come un simbolo categorematico, mentre gli altri simboli, che utilizzeremo per costruire delle proposizioni, saranno dei simboli sincategorematici, perché avranno significato soltanto quando sono associati, con certe regole, ad altri.

## 2. CONNETTIVI FONDAMENTALI E MATRICI DI VERITÀ

Sono stati escogitati vari sistemi di notazioni convenzionali per indicare le proposizioni composte ed i connettivi con i quali esse vengono costruite: ricordiamo qui di passaggio che esiste il simbolismo della scuola anglosasso-

ne, che ha avuto la sua origine nei lavori del matematico italiano G. Peano (che abbiamo già nominato nel capitolo 1), ed è stato adottato da Bertrand Russell nelle sue opere di logica matematica. Esiste anche un simbolismo che ha la sua origine nelle convenzioni della scuola polacca di logica; spesso inoltre vengono adottati altri simbolismi, per esempio dagli studiosi di circuiti elettrici.

Nelle pagine che seguono, noi adotteremo il simbolismo creato dal matematico tedesco D. Hilbert ed adottato dagli studiosi della sua scuola di pensiero. Ovviamente il significato e la validità di ciò che sarà detto non dipendono dalle notazioni che verranno adottate, perché, ripetiamo, queste sono da considerarsi come del tutto convenzionali.

Il primo connettivo, simbolo sincategorematico, che prenderemo in considerazione è il simbolo che viene chiamato di *negazione*; esso sarà rappresentato ponendo il segno « - » davanti al simbolo della proposizione che si intende negare. Pertanto, data per esempio la proposizione indicata con A, la proposizione che si ottiene dalla sua negazione sarà indicata con il simbolo:

$$(1) \quad -A,$$

da leggersi «non A»; questa proposizione è falsa se la A è vera, ed è vera se la A è falsa.

Il simbolo di negazione è il solo simbolo che opera su un'unica proposizione; presenteremo ora dei simboli che servono per costruire delle proposizioni composte a partire da altre due proposizioni elementari.

A questo proposito ricordiamo che abbiamo detto di voler prendere in considerazione soltanto il valore di verità di una data proposizione: quindi se una proposizione è composta con altre due con un connettivo i casi possibili sono soltanto quattro; essi corrispondono a tutte le possibili assegnazioni di valori di verità alle due proposizioni componenti.

Per comodità, stabiliremo un ordine convenzionale, che manterremo sempre nel seguito, per enumerare tutti i casi possibili di assegnazione di valori di verità a due proposizioni A e B, con le quali viene composta una terza proposizione. Tale ordine convenzionale è indicato dalla seguente tabella:

$$(2) \quad \begin{array}{c|cccc} A & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline B & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Quindi ogni connettivo sarà determinato dai valori di verità assunti dalla proposizione composta quando alle due proposizioni componenti sono dati

i valori di verità nell'ordine stabilito dalla tabella (2), prendendo in considerazione le colonne da sinistra a destra; nel seguito non richiameremo più questa tabella, limitandoci a presentare i quattro valori di verità che competono alla proposizione composta, quando alle proposizioni componenti sono attribuiti i valori di verità nell'ordine stabilito ora. Si suol dire che i quattro valori di verità corrispondenti ad un determinato connettivo danno la *matrice di verità* del connettivo stesso.

Enumereremo qui di seguito i connettivi che sono di uso più frequente in queste questioni.

Connettivo *et* (che viene anche richiamato con il termine inglese *and*). La proposizione che si ottiene da altre due mediante l'utilizzazione di questo connettivo viene abitualmente indicata ponendo il segno « $\wedge$ » tra i simboli delle due; date, per esempio, le due proposizioni A e B, si scriverà quindi:

$$(3) \quad A \wedge B,$$

da leggersi «A *et* B» oppure «A *and* B».

La matrice di verità della proposizione (3) è data dalla seguente tabella, nella quale, ripetiamo, i casi possibili sono elencati nell'ordine dato dalla tabella (2):

$$(4) \quad 1, 0, 0, 0.$$

Ciò che è espresso dalla matrice di verità (4) si potrebbe esporre in parole dicendo che la proposizione (3) è vera nel solo caso in cui siano vere entrambe, la A e la B, ed è falsa in tutti gli altri casi.

L'operazione che, a partire dalle due proposizioni A e B, conduce alla costruzione della proposizione (3) viene anche chiamata *congiunzione* delle due proposizioni nominate, oppure anche *prodotto logico* di esse.

Connettivo *vel* (che viene anche richiamato con il termine inglese *or*). La proposizione che si ottiene da altre due mediante l'utilizzazione di questo connettivo viene abitualmente indicata ponendo il segno « $\vee$ » tra i simboli delle due; date, per esempio, le due proposizioni A e B, si scriverà quindi:

$$(5) \quad A \vee B,$$

leggendo «A *vel* B» oppure anche «A *or* B». La matrice di verità della proposizione (5), sempre secondo l'ordine convenzionale di enumerazione dei casi che è stato stabilito, è data dalla seguente tabella:

$$(6) \quad 1, 1, 1, 0.$$

Pertanto la proposizione (5) è falsa nel solo caso in cui sono false entrambe, la A e la B, ed è vera in tutti gli altri casi, cioè quando anche una sola delle due è vera.

L'operazione che, a partire dalle due proposizioni A e B, conduce alla (5), viene anche chiamata *alternativa* o anche *somma logica* delle due proposizioni considerate.

Particolare interesse riveste la proposizione composta data da:

$$(7) \quad \neg A \vee B;$$

in base alle matrici di verità dei connettivi e alla loro gerarchia (vedi paragrafo successivo), si verifica che la proposizione (7) ha la seguente matrice di verità:

$$(8) \quad 1, 0, 1, 1.$$

La proposizione (7) è molto utilizzata nelle elaborazioni di logica, e pertanto si conviene spesso di indicarla con un apposito connettivo, che viene indicato con il segno « $\rightarrow$ » (freccia), nel modo seguente:

$$(9) \quad A \rightarrow B;$$

la proposizione (9) potrebbe essere letta «A *freccia* B»; essa viene anche spesso letta «A *implica* B»; osserviamo tuttavia che questo modo di lettura potrebbe essere fuorviante, perché potrebbe far pensare ad una stretta analogia tra la relazione indicata con la (7), o convenzionalmente con la (9), e l'operazione di deduzione che abbiamo considerato nel primo capitolo. Per evitare confusioni si suol dare il nome di *implicazione materiale* alla proposizione simbolizzata dalla (7) e in corrispondenza la proposizione A viene chiamata *antecedente* dell'implicazione, mentre la B viene chiamata *conseguente* della stessa. Tuttavia si può anche osservare che, quando la proposizione antecedente A è vera, la (9) risulta vera solo nel caso in cui sia vera anche la conseguente B.

Viene spesso utilizzato anche un altro connettivo che viene indicato con il simbolo « $\leftrightarrow$ » (doppia freccia), nel modo seguente:

$$(10) \quad A \leftrightarrow B.$$

La proposizione (10) potrebbe essere letta con la frase «A *doppia freccia* B», ma viene spesso letta con la frase «A è *equivalente a* B»; infatti la sua matrice di verità è la seguente:

$$(11) \quad 1, 0, 0, 1.$$



Pertanto la (10) è vera nel solo caso in cui A e B siano entrambe vere oppure entrambe false. A proposito dell'interpretazione del termine *equivalente* si possono fare osservazioni analoghe a quelle fatte poco sopra a proposito del nome *implicazione* dato alla (9). Infatti ripetiamo qui che il significato delle proposizioni composte (9) e (10) è dato esclusivamente dalle corrispondenti matrici di verità (8) e (11).

Nelle pagine che seguono daremo le regole per costruire delle proposizioni più generali di quelle che abbiamo presentato finora; concludiamo questo paragrafo ripetendo ancora una volta che le notazioni che abbiamo introdotto fin qui sono convenzionali; in altre parole esse sono state scelte e non sono imposte dalla logica. Infatti si può dimostrare che tutte le espressioni che si ottengono con l'impiego dei vari connettivi presentati finora possono essere costruite con un unico connettivo; in questo caso però le formule che si ottengono sono di lettura molto scomoda.

### 3. FORMULE BEN FORMATE ED ARITMETICA MODULO 2

Per la scrittura delle formule del calcolo delle proposizioni adotteremo nel seguito le convenzioni sulle parentesi che sono di uso comune nell'algebra, come abbiamo già fatto nel capitolo precedente; precisamente converremo che l'insieme di simboli compreso tra due parentesi, quando una (la prima) sia aperta e la seconda, immediatamente successiva, sia chiusa, debba essere considerato come un tutto unico, il cui valore di verità deve essere calcolato in funzione dei valori di verità delle proposizioni componenti prima di calcolare i valori di verità dell'espressione composta. Ovviamente questo tutto unico potrà essere indicato con un unico simbolo, e di conseguenza si potrà proseguire nell'analisi dell'espressione passando ad una seconda coppia di parentesi (l'una aperta e la prima chiusa che la segua) che risultassero esterne alla coppia precedente.

Anche in questo caso è necessario introdurre il concetto di *formula ben formata*, che faremo con le convenzioni seguenti, analoghe a quelle esposte nel paragrafo 4 del capitolo 2.

Le convenzioni sono le seguenti:

- a) ogni singolo simbolo categorematico (cioè simbolo di una singola proposizione isolata) è una *fbf*;
- b) se  $P$  è una *fbf*, anche  $\neg P$  è una *fbf*;
- c) se  $P$  e  $Q$  sono due *fbf*, anche  $P \wedge Q$  e  $P \vee Q$  sono delle *fbf*;
- d) nessun'altra successione di simboli è una *fbf*.

Riassumendo quindi si potrebbe dire che una fbf è un'espressione che si può ottenere dalle singole proposizioni mediante l'applicazione successiva (ovviamente un numero finito di volte) delle operazioni di negazione, di congiunzione e di alternativa.

Così, per esempio, la formula seguente:

$$(1) \quad (-(A \wedge B) \vee C) \wedge (((A \vee D) \wedge C) \vee E)$$

è una fbf; invece non lo è la formula seguente:

$$(2) \quad -A \wedge B \vee C.$$

Per evitare di dover utilizzare troppe parentesi si introducono poi delle convenzioni che stabiliscono una specie di *gerarchia* tra i connettivi, analogamente a quanto si fa in algebra per le operazioni di addizione e di moltiplicazione. Infatti si sa, per esempio, che scrivendo l'espressione numerica:

$$(3) \quad 3 + 5 * 2,$$

l'operazione di moltiplicazione di 5 per 2 deve essere eseguita prima dell'operazione di addizione, anche se nella scrittura essa viene indicata dopo; di conseguenza, la (3) indica il numero 13, mentre indicherebbe il numero  $16 = 8 * 2$  se fosse stata scritta nella forma:

$$(4) \quad (3 + 5) * 2.$$

Le regole di algebra ora ricordate potrebbero essere enunciate dicendo che, nelle espressioni numeriche ed algebriche, le operazioni di addizione e di sottrazione hanno una «portata» superiore a quelle di moltiplicazione e di divisione, nel senso che, per esempio nella formula (3), il «dominio» dell'operazione di addizione si estende fino a dopo l'ultimo 2, mentre, per esempio, il dominio dell'operazione di moltiplicazione non si estende fino a prima del primo 3. Analogamente le operazioni di moltiplicazione e di divisione hanno una portata superiore a quelle di elevazione a potenza o di estrazione di radice. Con queste convenzioni i valori delle espressioni numeriche possono essere calcolati con sicurezza, senza che sia necessario l'impiego di troppe parentesi per indicare quali operazioni debbono precedere le altre. Regole analoghe si enunciano anche per i connettivi del calcolo delle proposizioni; a questo proposito si stabilisce quanto segue.

i) Il simbolo di negazione ha portata soltanto sulla proposizione immediatamente successiva.

Così, per esempio, la formula:

$$(5) \quad \neg A \wedge B$$

indica la congiunzione della proposizione che è la negazione di A e la B. Se si volesse negare la congiunzione occorrerebbe scrivere:

$$(6) \quad \neg (A \wedge B).$$

Il fatto che le due proposizioni siano diverse è verificato subito calcolando le matrici di verità delle (5) e (6); esse sono rispettivamente:

$$(7) \quad 0, 0, 1, 0 \quad \text{e} \quad 0, 1, 1, 1.$$

ii) I simboli di congiunzione e di alternativa hanno portata superiore a quello di negazione, ma inferiore a quelli di freccia e di doppia freccia.

Quindi, per esempio, scrivendo:

$$(8) \quad A \rightarrow B \wedge C,$$

si indica l'implicazione materiale che ha come antecedente A e come conseguente la congiunzione  $B \wedge C$ . Questa proposizione è diversa da quella rappresentata con la formula:

$$(9) \quad (A \rightarrow B) \wedge C.$$

Ovviamente, quando in una formula entrano dei simboli che hanno la medesima portata occorre precisare con parentesi quale operazione logica si intende eseguita prima dell'altra; altrimenti non si ottengono delle formule ben formate, come nel caso della successione di simboli (2) che non è una fbf.

Le regole che abbiamo esposto permettono di calcolare il valore di verità di una proposizione comunque composta in funzione dei valori di verità delle proposizioni componenti. Ciò può essere fatto attribuendo a tutte le proposizioni elementari i possibili valori in tutti i modi possibili, e determinando i valori di verità delle proposizioni composte in base alle matrici di verità dei connettivi. Tuttavia è facile accorgersi che una procedura di questo tipo richiede molto tempo, non appena il numero delle proposizioni elementari che entrano a formare la proposizione composta supera qualche unità; per esempio nel caso della espressione (1) che contiene 5 proposizioni elementari occorrerebbe esaminare tutti i  $2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$  casi, che nascono attribuendo a ciascuna proposizione elementare ogni possibile valore di verità.

È tuttavia possibile calcolare il valore di verità di una proposizione composta facendo riferimento ad una stretta analogia che intercede tra il calcolo del valore di verità di una proposizione e il calcolo del valore numerico, eseguito con certe regole, di una opportuna espressione aritmetica.

Ricordiamo qui che l'insieme dei numeri naturali può essere ripartito in due insiemi; un numero appartiene all'uno oppure all'altro di questi a seconda che il resto della sua divisione per 2 sia zero oppure uno, cioè a seconda che il numero sia pari oppure dispari.

Il fatto che due numeri appartengono alla medesima classe viene espresso dicendo che essi sono *congruenti modulo 2*. Nel seguito di questo paragrafo noi converremo di scrivere semplicemente il segno « = » per indicare che due numeri appartengono alla medesima classe; con questa convenzione scriveremo quindi, per esempio:

$$(10) \quad 3 = 11 = 1; \quad 10 = 4 = 2 = 0.$$

È noto che si può costruire un'aritmetica, cioè un insieme di leggi di calcolo sui simboli numerici, che operano sulle due classi di numeri pari e dispari, con regole molto semplici; infatti in questa aritmetica esistono soltanto due numeri, cioè lo zero (0) e l'uno (1).

L'aritmetica che così si ottiene viene spesso chiamata *aritmetica modulo 2*. In essa per le due operazioni di addizione, indicata con « + » e di moltiplicazione, indicata con « \* », valgono le seguenti leggi:

$$(11) \quad \begin{array}{ll} 0 + 1 = 1 + 0 = 1; & 0 + 0 = 1 + 1 = 0; \\ 0 * 0 = 0 * 1 = 1 * 0 = 0; & 1 * 1 = 1. \end{array}$$

Da queste leggi segue anche immediatamente che, per un qualunque numero  $a$  dell'aritmetica modulo 2, vale la legge:

$$(12) \quad a * a = a.$$

Con queste convenzioni risulta abbastanza facile costruire delle espressioni aritmetiche le quali possano fornire i valori delle proposizioni composte in funzione dei valori di verità delle proposizioni componenti.

La tabella nella pagina successiva fornisce le formule che permettono di eseguire i calcoli necessari.

È facile inoltre verificare che se la proposizione  $A$  ha il valore di verità  $a$ , la proposizione  $\neg A$  ha il valore  $a + 1$ .

Con queste convenzioni i valori delle proposizioni (5) e (6) sono dati dalle formule:

$$(13) \quad (a + 1) * b \quad \text{ed} \quad a * b + 1$$

rispettivamente.

Proposizione	Matrice di verità	Formula per il calcolo del valore modulo 2
$A \wedge B$	1, 0, 0, 0	$a * b$
$A \vee B$	1, 1, 1, 0	$a * b + a + b$
$A \rightarrow B$	1, 0, 1, 1	$a * b + a + 1$
$A \leftrightarrow B$	1, 0, 0, 1	$a + b + 1$

#### 4. ASSIOMI E REGOLE DI DEDUZIONE

Abbiamo finora presentato le operazioni sulle proposizioni con riferimento al calcolo dei loro valori di verità. Daremo ora delle regole per trasformare le espressioni contenenti dei simboli categorematici e dei simboli sincategorematici in modo che, partendo da certe espressioni inizialmente date e chiamate *assiomi*, si possono costruire altre proposizioni, la cui successione verrà chiamata *teoria*.

Come abbiamo già avvertito nel paragrafo 6 del capitolo 1, la scelta delle proposizioni di partenza, da chiamarsi *assiomi*, ammette un certo grado di libertà, e pertanto è stata fatta dai vari Autori in modo diverso, a seconda dei gusti e della formazione culturale. Tuttavia, come abbiamo detto, occorre che le proposizioni di partenza che vengono scelte non siano tra loro contraddittorie.

In questo ordine di idee, ogni scienza che voglia essere rigorosa dovrebbe esporre i propri sistemi concettuali enunciando inizialmente le proposizioni non dimostrate che vengono scelte, in quella trattazione, come assiomi. Così, per esempio, si conoscono vari sistemi di assiomi per la geometria, e sono stati costruiti dei sistemi di assiomi per altre branche della scienza: per esempio, sono stati costruiti dei sistemi di assiomi per la fisica quantistica, per la biologia e per altre scienze particolari. Ovviamente, quando si tratti di scienze che riguardano una realtà esteriore che è anche oggetto delle osservazioni fatte con i nostri sensi, la scelta degli assiomi, cioè dei punti di partenza, viene

preferibilmente fatta in modo da rispettare le osservazioni elementari che riguardano gli oggetti della scienza di cui si tratta.

In particolare la logica può essere costruita a partire da certe proposizioni iniziali; ogni altra proposizione, dedotta da queste, può essere chiamata *teorema* e le regole da utilizzarsi per costruire i teoremi verranno chiamate *regole di deduzione*.

Gli assiomi che D. Hilbert ha scelto a fondamento del calcolo delle proposizioni sono i tre seguenti:

- (1)  $A \rightarrow (B \rightarrow A),$
- (2)  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$
- (3)  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B).$

Da queste tre proposizioni composte se ne possono trarre altre con le seguenti regole, che verranno chiamate, come si è detto, *regole di deduzione*.

*i)* In una singola espressione, è lecito sostituire ad una lettera, ovunque essa compaia, una formula ben formata (*regola di sostituzione*).

*ii)* Se nella successione di proposizioni che così si ottiene si incontra una formula P, ed in seguito una formula  $P \rightarrow Q$ , è lecito introdurre la proposizione isolata Q nella successione.

La regola *ii)* viene spesso chiamata *regola del distacco* oppure richiamata con l'espressione latina *modus ponendo ponens* o infine in modo più breve con l'espressione *modus ponens*, con riferimento a certe modalità di deduzione già enunciate dalla logica medievale, e che incontreremo nel seguito.

Ogni proposizione che si può ottenere da quelle enunciate mediante l'applicazione di queste regole verrà detta *deducibile*.

Così, per esempio, applicando le regole di cui sopra, e partendo dagli assiomi enunciati, è possibile inserire, nella successione delle proposizioni dedotte da questi, la proposizione:

- (4)  $A \rightarrow A.$

## 5. LE TAUTOLOGIE

Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, come si possano costruire delle proposizioni composte a partire da certe altre, e come si possa calcolare il valore di verità di una proposizione qualunque, che sia rappresentata da una *fbf*.

Tra le proposizioni composte hanno particolare importanza quelle che hanno valore di verità uguale ad 1 quale che sia il valore di verità delle proposizioni componenti. Una proposizione che ha questa proprietà viene chiamata *tautologia*; questo termine è utilizzato spesso nel linguaggio comune; esso è preso dalla lingua greca e, in questa lingua, significa «discorso (o espressione) che dice la stessa cosa»: così, per esempio, nella accezione del linguaggio comune, la frase «Una rosa è una rosa» viene classificata come una tautologia, perché è vera in ogni modo, anche se dice poco di nuovo a chi la legge o l'ascolta.

Noi tuttavia riserveremo al termine *tautologia* il significato preciso che abbiamo spiegato sopra. Così, in base alle formule che abbiamo fornito nel paragrafo 3 per il calcolo dei valori di verità delle proposizioni, si verifica che la formula seguente:

$$(1) \quad \neg A \vee A$$

è una tautologia; ed analogamente si verifica che le formule (1), (2), (3) del paragrafo precedente sono delle tautologie.

La logica classica ha enumerato da tempo certe tautologie che sono state utilizzate come schemi validi di deduzione, e sono ricordate con nomi classici in latino; enunceremo qui alcune di tali tautologie, utilizzando i simboli introdotti in questo capitolo.

*Modus ponendo ponens:*

$$(2) \quad ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B.$$

*Modus tollendo tollens:*

$$(3) \quad ((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A.$$

*Modus tollendo ponens:*

$$(4) \quad ((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B.$$

*Modus ponendo tollens:*

$$(5) \quad (\neg(A \wedge B) \wedge A) \rightarrow \neg B.$$

*Argumentum a fortiori:*

$$(6) \quad (A \wedge B) \rightarrow A.$$

*Reductio ad absurdum* (prima forma):

$$(7) \quad (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A.$$

*Reductio ad absurdum* (seconda forma):

$$(8) \quad (A \rightarrow (B \wedge \neg B)) \rightarrow \neg A.$$

*Dilemma costruttivo*:

$$(9) \quad ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee B)) \rightarrow C.$$

*Dilemma distruttivo*:

$$(10) \quad ((A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (\neg B \wedge \neg C)) \rightarrow \neg A.$$

Infine la seguente *tautologia*:

$$(11) \quad (\neg A \wedge A) \rightarrow B$$

traduce in formule il significato della frase latina: «ex falso sequitur quod libet», la quale significa che da una premessa falsa si può trarre qualunque conclusione, vera o falsa che sia.

Abbiamo osservato che le formule (1), (2), (3) del paragrafo precedente, le quali traducono un possibile sistema di assiomi per la logica, sono delle tautologie. Si osserva anche immediatamente che le regole di deduzione, da noi enunciate nel paragrafo precedente, danno luogo alla costruzione di altre tautologie, che sono, in questo caso, i teoremi della logica.

Viceversa si dimostra il seguente teorema, che viene abitualmente chiamato *teorema di completezza semantica*:

Ogni tautologia è deducibile.

In altre parole, data una proposizione composta che ha valore di verità uguale ad 1, quale che sia il valore di verità delle proposizioni componenti, applicando un numero finito di volte le regole di deduzione in ordine opportuno, si giunge a costruire una dimostrazione della proposizione stessa, a partire dagli assiomi.

## 6. I PREDICATI

Abbiamo finora preso in considerazione le proposizioni non analizzate, cioè le proposizioni nelle quali non abbiamo distinto soggetto, copula verbale e



predicato. È possibile tuttavia costruire una simbolizzazione che costituisca un passo ulteriore nell'analisi dei mezzi di comunicazione del pensiero e nella deduzione.

Consideriamo, per esempio, la frase seguente:

(1)  $x$  è cittadino milanese.

Questa chiaramente non può essere considerata una proposizione perché ad essa non si può attribuire un valore di verità; tuttavia la frase (1) diventa una proposizione quando al posto della indeterminata  $x$  venga messo il nome di una persona umana: precisamente la frase diventa vera oppure falsa a seconda che al posto di  $x$  sia messo il nome di un cittadino milanese oppure rispettivamente di un essere umano che non è milanese. In questa frase completata, il nome che sarà messo al posto della  $x$  sarà il soggetto e l'espressione «cittadino milanese» avrà la funzione di predicato. In altre parole, si potrebbe dire che la frase (1) contiene una lacuna, simbolizzata dalla lettera indeterminata  $x$ ; la frase viene ad avere un senso compiuto, e quindi viene ad acquistare un valore di verità, quando la lacuna venga colmata, ponendo al posto della indeterminata il nome di un elemento dell'universo di cui si sta trattando.

Generalizzando, si potrebbero considerare anche frasi con due, tre o più lacune; per esempio, parlando di esseri umani, si può pensare alla frase:

(2)  $x$  è padre di  $y$ ;

e, parlando di geometria; ed in particolare di punti di una retta, si può pensare alla frase:

(3) il punto  $x$  sta tra i punti  $y$  e  $z$ .

Proposizioni come quelle che abbiamo considerato possono essere rappresentate con simboli convenzionali del tipo:

(4)  $P(x)$ ;  $Q(x, y)$ ; oppure  $R(x, y, z)$

e così via. Si suol dire che questi simboli esprimono dei *predicati*; le lacune nelle frasi, simbolizzate dalle indeterminate  $x, y, z \dots$  vengono chiamate anche *argomenti* dei predicati. Pertanto questi vengono anche chiamati *monargomentali* oppure *biargomentali* o *triargomentali* ecc.

Ricordiamo che, come abbiamo fatto nel paragrafo 3 del capitolo 2, intenderemo in ogni caso che gli elementi di cui parleremo siano elementi di un insieme, che potremo chiamare *universo del discorso*, o anche brevemente universo. Abbiamo visto che, data una frase incompleta, che presenta una o più lacune, si può ottenere una proposizione sostituendo al posto delle variabili che denotano le lacune il nome o i nomi di elementi dell'universo che

si considera; tuttavia non è questo il solo modo per ottenere una proposizione da una frase incompleta. Si può infatti ottenere una proposizione con l'applicazione di certi operatori logici che vengono chiamati *quantificatori*. Si consideri il seguente esempio: sia l'universo del discorso l'insieme dei cittadini milanesi, insieme che indicheremo con il simbolo  $M$ ; si consideri il predicato «biondo», rappresentato con il simbolo  $B(x)$ ; pertanto tale simbolo indicherà la frase incompleta:

(il cittadino milanese di nome)  $x$  è biondo.

Se Ambrogio è il nome di un dato cittadino milanese, allora il simbolo  $B(\text{Ambrogio})$  indica la frase «Ambrogio è biondo», frase che può essere vera o falsa. Possiamo tuttavia pensare anche alle frasi seguenti:

(5) Tutti i milanesi sono biondi,

oppure:

(6) Alcuni milanesi sono biondi.

La prima frase viene abitualmente rappresentata nel modo seguente:

(7)  $\forall x [B(x)]$

ed il simbolo « $\forall x$ » viene chiamato *quantificatore universale*. Il simbolo (7) può anche essere letto:

«Ad ogni elemento dell'universo compete il predicato  $B$ ».

La frase (6) viene abitualmente rappresentata nel modo seguente;

(8)  $\exists x [B(x)]$ ;

il simbolo « $\exists x$ » viene chiamato anche *quantificatore esistenziale* ed il simbolo (8) può essere letto «esistono (nell'universo) degli elementi ai quali compete il predicato  $B$ », ovvero «esistono degli elementi per i quali la frase  $B(x)$  è vera».

Ci si accerta facilmente che il simbolo « $\exists x$ » può essere definito mediante il quantificatore universale « $\forall x$ » nella forma seguente:

(9)  $\neg \forall x [\neg B(x)]$ .

Infatti affermare che esistono nell'universo considerato degli elementi che rendono vera la frase  $B(x)$  equivale a negare che la frase stessa sia falsa per tutti.

## 7. ESERCIZI E COMPLEMENTI

7.1. Le regole per l'aritmetica modulo 2 che abbiamo enunciato nel paragrafo 3 possono essere presentate in forma lievemente diversa, anche se sostanzialmente equivalente.

A tal fine consideriamo i due simboli seguenti: P (pari) e D (dispari); per questi possiamo definire delle operazioni con le seguenti leggi.

Addizione:

$$(1) \quad D + D = P + P = P; \quad D + P = P + D = D.$$

Moltiplicazione:

$$(2) \quad D * D = D; \quad P * P = P * D = D * P = P.$$

7.2. Siano A, B, C ... delle proposizioni e siano a, b, c ... i corrispondenti valori di verità.

Si verifichi la validità delle seguenti affermazioni.

i) Date due proposizioni A, B, la condizione perché esse siano vere entrambe si esprime nell'aritmetica modulo 2 con la seguente equazione:

$$(3) \quad a * b + 1 = 0;$$

la condizione perché una sia vera e l'altra falsa si esprime con la seguente equazione:

$$(4) \quad a + b + 1 = 0;$$

la condizione perché siano entrambe false si esprime con l'equazione:

$$(5) \quad a * b + a + b = 0.$$

Si verifica che l'equazione (4) esprime quella relazione tra le due proposizioni che abbiamo chiamato *dilemma* nel paragrafo 9.5 del capitolo 1.

ii) Date tre proposizioni A, B, C, la condizione perché esse siano vere tutte e tre si esprime con l'equazione:

$$(6) \quad a * b * c + 1 = 0;$$

la condizione perché due di esse siano vere e la terza falsa si esprime con la equazione:

$$(7) \quad a * b * c + a * b + b * c + c * a + 1 = 0;$$

la condizione perché una sola di esse sia vera e la terza di conseguenza falsa si esprime con l'equazione:

$$(8) \quad a * b * c + a + b + c + 1 = 0;$$

infine la condizione perché tutte e tre siano false si esprime con l'equazione;

$$(9) \quad a * b * c + a * b + b * c + a * c + a + b + c = 0.$$

Si verifica che l'equazione (7) traduce in simboli il ragionamento di scorretta polemica che abbiamo riportato nel paragrafo 9.5 del capitolo 1.

**7.3.** Le formule dell'aritmetica modulo 2, che permettono il calcolo dei valori di verità delle proposizioni composte, permettono anche di risolvere i problemi di logica con procedimenti analoghi a quelli che si seguono per risolvere gli abituali problemi matematici, come si può vedere dall'esempio seguente (di T. Vargas).

**PROBLEMA.** Ci fu un furto in un grande magazzino. L'inchiesta diede i seguenti risultati:

- i)* Se il colpevole è un uomo, è di piccola statura.
- ii)* Se egli è di piccola statura, egli entrò dalla finestra.
- iii)* Il colpevole è un uomo, o quanto meno indossò abiti maschili.
- iv)* Se indossò abiti maschili, ammesso che il racconto del testimone oculare sia degno di fede, egli entrò dalla finestra.

La visita al luogo del misfatto mostrò peraltro che il colpevole non era entrato dalla finestra. Trovare il colpevole.

Si osserva che nel problema sono coinvolte cinque proposizioni, che indicheremo con i seguenti simboli:

- U: il colpevole è un uomo;
- P: il colpevole è di piccola statura;
- M: il colpevole indossò abiti maschili;
- F: il colpevole entrò dalla finestra;
- T: il testimone ha fatto un racconto degno di fede.

Utilizzando i connettivi introdotti nel paragrafo 2, le proposizioni del problema possono essere tradotte simbolicamente con le formule seguenti:

- i)*  $U \rightarrow P$ ;
- ii)*  $P \rightarrow F$ ;
- iii)*  $U \vee M$ ;
- iv)*  $M \rightarrow (T \rightarrow F)$ .

È possibile ora scrivere le formule che forniscono i valori di verità di queste proposizioni in base alla tabella del paragrafo 3. Si osserva inoltre che tutte queste proposizioni si intendono affermate; ciò si esprime imponendo che tutti i loro valori di verità, che vengono calcolati in base alle formule della tabella ricordata, siano uguali ad 1. Di conseguenza dalle quattro formule ora scritte si ottengono le quattro equazioni seguenti:

- i)*  $u * (p + 1) = 0$ ;
- ii)*  $p * (f + 1) = 0$ ;
- iii)*  $(m + 1) * (u + 1) = 0$ ;
- iv)*  $m * t * (f + 1) = 0$ .

L'ultima informazione del problema impone che si ponga:

$$f = 0.$$

Di conseguenza si ottengono dalle equazioni scritte i seguenti valori per le altre incognite:

$$p = u = t = 0; \quad m = 1.$$

Quindi si ha che il testimone non è degno di fede, il colpevole non è un uomo, non era di piccola statura ed era travestito da uomo.

**7.4. ESERCIZIO.** Ad una certa corsa hanno partecipato tre cavalli, che chiameremo Baio, Sauro e Roano. Prima della corsa tre amici hanno fatto le seguenti previsioni:

- i) Baio vincerà;
- ii) Baio non potrà essere secondo;
- iii) Sauro non potrà essere terzo.

Una sola di queste previsioni si è dimostrata giusta. Trovare l'ordine di arrivo.

Indichiamo convenzionalmente con i simboli seguenti le proposizioni pronunciate dagli amici:

- B(1) Baio arriverà primo;
  - S(2) Sauro arriverà secondo;
- e così via ...

Con questi simboli, le proposizioni affermate dagli amici possono essere rappresentate con le formule seguenti:

- (10) B(1);
- (11) B(1)  $\vee$  B(3);
- (12) S(1)  $\vee$  S(2).

In base alla matrice di verità del connettivo « $\vee$ » (vel) si ha un solo modo di rendere vera una sola delle proposizioni enunciate, e questo modo dà il seguente ordine di arrivo: primo Sauro, secondo Baio, terzo Roano.

## 4. IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

### 1. LE DECISIONI IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

Abbiamo finora trattato della deduzione, cioè della costruzione di nuove proposizioni a partire da altre che si consideravano o che si accettavano come certe.

Ci porremo d'ora innanzi nelle condizioni di chi debba prendere delle decisioni in condizioni di incertezza, cioè senza essere certo delle conseguenze. E ciò perché i punti di partenza non sono certi, o perché mancano informazioni complete, oppure perché le leggi che reggono la realtà su cui si vuole operare sono troppo complicate e non completamente conosciute. Osserviamo che molto spesso capita nella pratica di doversi comportare in questo modo. Ma anche molte scienze debbono lavorare in queste condizioni, soprattutto quelle che riguardano l'uomo, ed in particolare le scienze sociali (economia, sociologia, psicologia sociale, scienze politiche in generale ecc.).

Il problema di prendere delle decisioni che hanno conseguenze economiche in condizioni di incertezza è trattato da tempo da un ramo della matematica che si chiama *calcolo delle probabilità*. Noi daremo qui un breve cenno di queste questioni, considerate dal punto di vista della teoria delle decisioni razionali, cioè coerenti con certe premesse, nella misura in cui queste possono essere conosciute.

Consideriamo un determinato soggetto umano T (Tizio). Diremo che un certo evento è *aleatorio* per T, se egli non ha informazioni complete sul suo avverarsi, oppure sul suo essersi avverato. Per esempio, se si lancia una moneta, il fatto che comparirà una oppure l'altra delle due facce può essere considerato come un evento aleatorio per chi la lancia; infatti il comparire di una, oppure dell'altra delle due facce è un evento le cui leggi non sono completamente conosciute, almeno in generale. Ma osserviamo qui che la mancanza di informazione completa può anche essere una qualità di un evento passato, perché dipende essenzialmente dal soggetto che viene preso in consi-

derazione e che deve prendere delle decisioni. Immaginiamo per esempio due alpinisti che, alla sera di una domenica, si trovano in un rifugio alpino, senza comunicazione con il resto del mondo; ovviamente per essi i risultati delle partite di calcio avvenute nel pomeriggio sono ancora ignoti, e quindi ogni decisione economica relativa a questi risultati (per esempio una scommessa) viene presa in condizioni di informazione incompleta, e quindi in condizioni di incertezza.

Da quanto abbiamo detto finora segue chiaramente che il fatto di essere aleatorio non è una proprietà dell'evento preso in sé, ma è essenzialmente relativo ad un soggetto umano, ed alle informazioni che questi possiede sull'evento stesso. In particolare può avvenire che un determinato evento sia considerato come aleatorio da un soggetto e sia invece fondatamente considerato come certo da un altro, che ha sufficienti informazioni.

## 2. IL CONTRATTO ALEATORIO

Consideriamo ora un soggetto umano T; diremo che egli stipula (o stringe o contrae) un *contratto aleatorio* in relazione ad un determinato evento E, che per lui è aleatorio, se stringe un contratto il cui esito finale dipende dall'avverarsi oppure dal non avverarsi dell'evento E. Per esempio, se T gioca al lotto un venerdì sera, egli stringe un contratto aleatorio con lo Stato, contratto il cui esito finale, vincita o spesa a fondo perduto, dipende dai numeri che verranno estratti il sabato successivo. Se, per esempio, T stringe un contratto di assicurazione contro i danni della grandine ai suoi campi, egli stipula un contratto aleatorio il cui esito finale (risarcimento dei danni oppure pagamento a fondo perduto del premio), dipende dall'evento aleatorio della caduta della grandine sui campi assicurati in un determinato periodo di tempo.

Come abbiamo visto dagli esempi, le circostanze nelle quali un soggetto umano stipula un contratto aleatorio possono essere le più svariate; spesso il soggetto stringe un contratto che viene abitualmente chiamato *scommessa*, per esempio puntando una certa somma ad un gioco che viene detto *d'azzardo* (lotto, roulette, ecc.) oppure comperando il biglietto di una lotteria. In tal caso la somma che il soggetto incassa se si verifica l'evento aleatorio oggetto della scommessa viene considerata come una *vincita*. Oppure il soggetto stringe un contratto di assicurazione, e la somma che il soggetto incassa nel caso in cui si avveri l'evento oggetto del contratto viene considerata come un *risarcimento*.

Per semplicità, noi immagineremo qui una situazione schematica, nella quale il contratto aleatorio viene stipulato in queste condizioni: il soggetto T stringe un contratto con un altro soggetto C (Caio) con i seguenti patti: T versa

subito una somma di denaro  $a$ , C versa subito una somma di denaro  $b$ . Se l'evento E, oggetto del contratto, si verifica, T ritira la somma:

$$S = a + b,$$

se invece l'evento E non si verifica, la stessa somma viene ritirata da C.

Il soggetto C può essere un tenitore di bisca, lo Stato, un assicuratore.

Se avviene questo contratto, diremo che il numero:

$$(1) \quad p = a / (a + b)$$

è la *valutazione che il soggetto T dà della probabilità dell'avverarsi dell'evento E*. Ed analogamente diremo che il numero:

$$(2) \quad q = b / (a + b)$$

è la *valutazione che il soggetto C (l'altro contraente) dà della probabilità del non avverarsi dell'evento stesso*.

In altre parole, diremo che un soggetto T valuta la probabilità di un evento aleatorio E con il numero  $p$  se T è disposto a versare subito una somma  $pS$  di denaro a condizione di ricevere l'intera somma  $S$  se l'evento E si verifica.

Accetteremo dall'intuizione il fatto che nessuno è disposto a versare una somma maggiore di quella che eventualmente riceverà; e quindi accetteremo dall'intuizione il fatto che la somma versata sia soltanto una parte, una frazione della somma che T riceverà eventualmente. Di conseguenza il numero  $p$  (ovviamente positivo), deve essere minore di 1. Si avrà quindi:

$$(3) \quad 0 < p < 1.$$

Abitualmente si generalizzano le relazioni (3), accettando per il numero  $p$  anche i valori 0 ed 1, come casi limiti; precisamente il valore  $p = 0$  viene considerato come esprime il fatto che T giudica *impossibile* l'evento E, ed il valore  $p = 1$  viene considerato come esprime il fatto che T giudica *certo* l'evento E. Con queste convenzioni, indicando con il simbolo  $p(E)$  la *valutazione della probabilità dell'evento E*, le relazioni (3) vengono abitualmente sostituite dalle:

$$(4) \quad 0 \leq p(E) \leq 1.$$

Nel seguito eviteremo sempre di parlare di probabilità di un evento E, ma parleremo sempre di valutazione della probabilità dell'evento stesso; infatti,



ripetiamo, nell'atteggiamento da noi qui assunto, ha senso parlare di probabilità soltanto in relazione al giudizio espresso da un soggetto umano che deve prendere delle decisioni che hanno delle conseguenze economiche, o che possono essere collegate con decisioni di questo tipo. Pertanto, come abbiamo già detto, le valutazioni e le conseguenti decisioni dipendono essenzialmente dalle informazioni che il soggetto possiede; quindi possono essere diverse da un soggetto ad un altro, e possono variare quando il soggetto acquisisce ulteriori informazioni sull'evento considerato.

Consideriamo ora un evento aleatorio  $E$ . Come abbiamo visto, il dire che esso è aleatorio (ovviamente per un certo soggetto umano  $T$  la cui esistenza è sempre sottintesa) equivale a dire che  $T$  non è certo del fatto che  $E$  accadrà oppure è accaduto; quindi non è neppure certo del fatto che  $E$  non accadrà o che non è accaduto. Pertanto ha senso considerare, insieme all'evento aleatorio  $E$ , anche un secondo evento aleatorio, che indicheremo convenzionalmente con il simbolo  $E'$ , che riterremo verificato se  $E$  non si verifica e viceversa; tale evento  $E'$  viene spesso chiamato *evento contrario* di  $E$ , ed ovviamente il verificarsi di uno dei due significa il non verificarsi dell'altro.

Con queste notazioni possiamo formulare in altro modo ciò che abbiamo già detto sopra, parlando del contratto aleatorio stipulato da un soggetto  $T$ . Abbiamo visto infatti che nel contratto aleatorio, insieme col soggetto  $T$ , che scommette sull'evento  $E$  e che ritira la propria posta e quella dell'avversario quando  $E$  si verifica, esiste un soggetto  $C$ , che ovviamente scommette sull'evento  $E'$ , e che ritira la propria posta e quella del soggetto  $T$  se  $E$  non si verifica, cioè se si verifica  $E'$ .

Osserviamo inoltre che alcuni eventi aleatori, che potremmo chiamare *complessi*, possono essere ritenuti come costituiti da altri eventi che potremmo chiamare *elementari*. Qui di seguito prenderemo in considerazione due tipi di eventi complessi.

a) Dati due eventi aleatori  $E$  ed  $H$ , chiameremo *somma logica*, ed indicheremo con il simbolo:

$$(5) \quad E \vee H,$$

l'evento aleatorio che si considera verificato se si verifica almeno uno dei due eventi  $E$  oppure  $H$ .

Così per esempio, se si considerano due esseri umani  $A$  e  $B$ , aventi la medesima età, l'evento che ciascuno dei due sia in vita dopo  $x$  anni è ovviamente aleatorio. In questo caso l'evento somma logica dei due si ritiene verificato se almeno uno dei due esseri umani sopravvive per almeno  $x$  anni.

b) Dati due eventi aleatori E ed H, chiameremo *prodotto logico* dei due, ed indicheremo con il simbolo:

$$(6) \quad E \wedge H,$$

l'evento aleatorio che si considera verificato se si verificano entrambi gli eventi E ed H.

Riprendendo l'esempio precedente, in questo caso l'evento prodotto logico dei due eventi di sopravvivenza si considera verificato soltanto se sopravvivono entrambi i soggetti umani considerati.

Ci varremo di questi concetti e di questi simboli per approfondire le nostre analisi sul comportamento razionale degli esseri umani in condizioni di informazione incompleta, ovvero, come si suol dire, in condizioni di incertezza, e per risolvere i problemi che si riattaccano a questa analisi.

### 3. IL PRINCIPIO DI COERENZA

Uno dei problemi fondamentali di cui ci occuperemo potrebbe essere formulato domandando come si valuta la probabilità di un determinato evento aleatorio, quando si sia in possesso di determinate informazioni su di esso. Tuttavia, prima di analizzare questo problema, occorre stabilire delle regole generali di valutazione, che fissino i criteri con i quali si debbono formare i giudizi di probabilità.

Abbiamo già avuto occasione di affermare che accettiamo dall'intuizione il fatto che nessuno è disposto a pagare di più di quanto spera di ottenere, se un determinato evento si verifica. Questa osservazione immediata costituisce un caso particolare di un principio generale che viene chiamato *principio di coerenza*. Esso riguarda il concetto di *coerenza* che potrebbe essere presentato nel modo seguente.

*Una valutazione di probabilità sarà detta coerente (e coerente sarà pure detto il soggetto che la formula) se, in relazione ai vari eventi considerati, nessuna combinazione di contratti possa condurre il soggetto, oppure gli altri contraenti, ad una vincita sicura (oppure ad una perdita sicura).*

In altri termini una valutazione coerente della probabilità di certi eventi deve essere tale che eventi aleatori restino sempre tali, quali che siano le combinazioni di contratti che ad essi si riferiscono.

OSSERVAZIONE. Questi enunciati potrebbero sembrare in contrasto con il fatto comunemente noto che gli assicuratori riescono a trarre un profitto dalle

loro attività, che riguardano essenzialmente contratti relativi ad eventi aleatori. Non intendiamo approfondire qui tale questione, e ci limitiamo a dire che la giustificazione dei profitti degli assicuratori può essere fondata sulla considerazione del servizio che costoro rendono ai clienti, coprendo i rischi che sarebbero troppo grandi per i singoli.

L'applicazione del principio di coerenza conduce in particolare alle conseguenze seguenti. Si pensi ad un soggetto T il quale valuta con un numero  $p(E)$  la probabilità di un evento E, e quindi accetta in un determinato contratto che l'altro contraente valuti con il numero:

$$(1) \quad q(E) = 1 - p(E),$$

la probabilità dell'evento E'. Si dimostra allora (si veda il successivo paragrafo 9.1), come conseguenza del principio di coerenza, che T è tenuto a dare all'evento E' la stessa valutazione  $q(E)$  (che egli ha accettato nella prima scommessa) anche in ogni altro contratto aleatorio che egli voglia stringere in relazione all'evento E o all'evento E'.

Osserviamo che il principio di coerenza non deve essere considerato come un postulato, o come una legge nel senso giuridico del termine; esso deve essere piuttosto visto come una specie di presunzione di ragionevolezza diffusa nel comportamento economico dell'uomo, presunzione in base alla quale è lecito attendersi che un soggetto stringa un contratto aleatorio dopo aver prudentemente considerato tutte le conseguenze, positive e negative, delle proprie decisioni, e dopo aver assunto tutte le informazioni possibili; ma è prudente attendersi che anche tutti gli altri contraenti dei vari contratti abbiano fatto lo stesso e di conseguenza è prudente pensare che nessuno, né il soggetto né gli altri contraenti, riesca a combinare le cose in modo che, in presenza di eventi aleatori, vi possa essere come risultato il guadagno certo di una delle parti.

Daremo qui gli enunciati di teoremi molto importanti per il seguito. A tal fine dovremo richiamare alcuni concetti che vengono utilizzati anche nel linguaggio comune, ma che debbono essere precisati per poter essere trattati con linguaggio scientifico e matematico.

Diremo che due eventi aleatori E ed H sono *incompatibili* oppure *si escludono a vicenda* se è certo che il verificarsi di uno fra essi esclude il verificarsi dell'altro.

Supponiamo di aver valutato le probabilità  $p(E)$  e  $p(H)$  di ciascuno dei due eventi; si pone il problema di valutare la probabilità dell'evento  $E \vee H$ , somma logica dei due.

A questo problema risponde il seguente teorema, che viene spesso chiamato *teorema delle probabilità totali*.

*Dati due eventi incompatibili E ed H, tra le valutazioni di probabilità di ciascuno e quella dell'evento somma logica sussiste la relazione seguente:*

$$(2) \quad p(E) + p(H) = p(E \vee H).$$

Come abbiamo detto, il teorema può essere dimostrato facendo ricorso al principio di coerenza. Noi non riportiamo qui la dimostrazione, ma ci limitiamo ad osservare che la relazione (1) rappresenta un caso particolare notevolissimo di tale teorema; infatti i due eventi E ed E' sono ovviamente incompatibili tra loro, e si escludono a vicenda; e d'altra parte l'evento somma logica  $E \vee E'$  è certo, come si deduce dalla stessa definizione. Infatti o avverrà l'evento aleatorio E oppure non avverrà, cioè avverrà l'evento E', che abbiamo chiamato il suo contrario. Quindi la valutazione della probabilità dell'evento somma logica  $E \vee E'$  è quella dell'evento certo, cioè 1. Si ha quindi, come caso particolare della (2), la relazione:

$$(3) \quad p(E) + p(E') = 1.$$

#### 4. LA VALUTAZIONE CONDIZIONATA DI PROBABILITÀ

Per enunciare un altro dei teoremi fondamentali del calcolo delle probabilità introdurremo ora il concetto, pure molto importante, di *probabilità condizionate*. A tal fine ricordiamo ciò che abbiamo detto ripetutamente, cioè che la valutazione della probabilità di un evento, cioè dell'impegno economico di un soggetto in relazione all'evento stesso, dipende essenzialmente dalle informazioni che il soggetto possiede o acquisisce.

Consideriamo ora due eventi aleatori E ed H. Un soggetto T può dare due valutazioni di probabilità dell'evento E: una prima valutazione, che indicheremo come al solito con il simbolo  $p(E)$ , viene data senza prendere in considerazione il fatto che l'evento H si sia avverato; la seconda valutazione, che indicheremo con il simbolo  $p(E | H)$  (leggendo «*valutazione della probabilità di E condizionata da H*») è la valutazione della probabilità dell'evento E che il soggetto T formula dopo aver avuto l'informazione che l'evento H è avvenuto.

Ovviamente può avvenire che l'informazione che H è avvenuto non cambi la valutazione che il soggetto T dà della probabilità dell'evento E; in questo caso particolare si avrà quindi:

$$(1) \quad p(E | H) = p(E),$$

ed i due eventi saranno chiamati *indipendenti* (ovviamente secondo il giudizio e la valutazione del soggetto T).

In generale si dimostra che la valutazione della probabilità dell'evento che abbiamo indicato con il simbolo  $E \wedge H$ , e chiamato *prodotto logico* dei due, è legata alla valutazione  $p(H)$  della probabilità dell'evento H ed a quella dell'evento E, condizionata dall'evento H, dalla relazione seguente:

$$(2) \quad p(E \wedge H) = p(H) \cdot p(E | H).$$

Accettiamo dall'intuizione che l'evento prodotto logico di due altri non dipenda dall'ordine in cui questi sono presi in considerazione; questo fatto può essere formulato scrivendo che si ha:

$$(3) \quad p(E \wedge H) = p(H \wedge E);$$

di qui, scambiando nella (2) i simboli E ed H tra loro, si ottiene la relazione importante:

$$(4) \quad p(E) \cdot p(H | E) = p(H) \cdot p(E | H).$$

La relazione (4) traduce in formule il collegamento tra giudizi che viene spesso fatto, a lume di buon senso, anche nelle argomentazioni quotidiane. Infatti, anche nell'argomentare di tutti i giorni, noi giudichiamo per esempio accresciuta la probabilità di un incendio grave in un certo fabbricato se riceviamo l'informazione che ivi esiste un deposito di materiale infiammabile; e viceversa, se veniamo a sapere che nel fabbricato si è sviluppato un incendio grave, giudichiamo cresciuta la probabilità che ivi esistesse un deposito di materiale infiammabile.

Nel caso in cui i due eventi E ed H siano giudicati indipendenti, e quindi valga la (1), la formula (2) acquista la forma più semplice:

$$(5) \quad p(E \wedge H) = p(E) \cdot p(H).$$

Il contenuto di questa formula viene spesso enunciato sotto forma di teorema, detto anche *teorema delle probabilità composte, per eventi indipendenti*. Il teorema può essere enunciato dicendo che:

*dati due eventi che si possono considerare indipendenti (nel senso sopra spiegato), la valutazione della probabilità che si avverino entrambi è il prodotto delle valutazioni delle probabilità di ciascuno di essi.*

La formula (4) può essere ulteriormente generalizzata; tale generalizzazione è il punto di partenza per ulteriori elaborazioni di questi concetti, elaborazioni che stanno alla base dell'applicazione di queste teorie alla scienza ed alla vita pratica.

## 5. INFORMAZIONI E VALUTAZIONI DI PROBABILITÀ

Ricordiamo qui ciò che abbiamo detto fin dall'inizio della nostra trattazione, e cioè che il concetto di probabilità di un evento aleatorio traduce il giudizio di un soggetto umano, in relazione ad un suo impegno economico collegato con l'evento. Infatti il giudizio di probabilità di un soggetto su un evento si traduce effettivamente soltanto quando il soggetto rischia determinate somme di denaro per ottenerne altre (ovviamente maggiori) a titolo di vincita o di risarcimento, se l'evento aleatorio si avvera. Se un giudizio di probabilità viene pronunciato senza che sia accompagnato da un impegno economico concreto, esso ha spesso soltanto il valore di una chiacchiera da caffè, che ha ben poco significato, tanto per la conoscenza teorica che per la vita pratica.

Pertanto appare ragionevole pensare che un soggetto pronunci un giudizio di probabilità ed assuma degli impegni seri soltanto dopo aver assunto tutte le informazioni possibili e ponderato bene le possibili conseguenze delle proprie decisioni. Si può tuttavia osservare che, come tutti i giudizi umani, anche il giudizio di probabilità può dipendere dalle condizioni psicologiche del soggetto che lo emette. Ciò avviene spesso quando le circostanze nelle quali il soggetto si trova ad agire ed a giudicare non sono tali da favorire la massima prudenza ed avvedutezza. Queste circostanze si verificano per esempio quando il contratto aleatorio viene presentato in forma di scommessa, in modo tale da mascherare la spesa della posta con la mole della vincita; il caso più comune è quello delle lotterie, che vengono presentate sempre esaltando clamorosamente l'importo dell'eventuale vincita. Ancora più clamoroso è il caso del gioco del lotto, nel quale lo Stato paga le eventuali vincite con somme di denaro che sono di vari ordini di grandezza inferiori a quelle che dovrebbero essere, quando si faccia un esatto calcolo delle combinazioni possibili, e su questo calcolo si fonda un prudente giudizio di probabilità.

Pertanto in questi casi, ed in casi analoghi, il soggetto tende a trascurare la prudente valutazione della probabilità dell'evento aleatorio, essendo abbagliato dalla entità dell'eventuale vincita, che supera ogni sua abitudine di valutazione ponderata della propria condotta economica. Un fenomeno analogo si ha nel caso in cui il soggetto prende in considerazione degli eventi molto sgradevoli, come gravi disastri o addirittura la morte, e quindi accetta di pagare premi di assicurazione di grandezza spesso sproporzionata a quella che sarebbe consigliata da un calcolo prudente ed avveduto.

Un discorso a parte meriterebbero poi i fenomeni psicologici collegati con il gioco d'azzardo, e che sono stati analizzati da tempo da psicologi, romanzieri e poeti. In questi casi si ha probabilmente una situazione psicologica che

spinge il soggetto, avente appunto il temperamento detto «del giocatore», ad affrontare gravi rischi, e che lo gratifica per questo stesso fatto, indipendentemente dall'eventuale vincita.

Pertanto si potrebbe dire che il gerente della bisca o del casinò fornisce in qualche modo una specie di droga psicologica, la quale viene così acquistata dai giocatori con il pagamento di una posta in ogni caso superiore alla misura razionale del rischio puramente economico.

Tralasciando per il momento la considerazione di queste situazioni e di altre analoghe, possiamo porci ora il problema di enunciare dei criteri per una valutazione prudente e razionale della probabilità di un evento aleatorio. Questo problema è molto importante per la teoria e per la pratica della vita economica, ed è stato oggetto di riflessioni e di elaborazioni teoriche da parte di scienziati e filosofi. Non intendiamo riprodurre qui per esteso le analisi e le discussioni che sono state fatte nei secoli addietro a questo proposito, e quindi ci limiteremo a presentare alcune idee fondamentali.

In linea di massima si potrebbe dire che esiste una scienza apposita, che si chiama *statistica*, la quale ha lo scopo di raccogliere le informazioni su insiemi di fenomeni, e di elaborare tali informazioni in modo che possano venire utilizzate nel comportamento economico dell'uomo. Così, per esempio, le statistiche riguardanti le nascite e le morti (per varie cause) dei soggetti umani appartenenti alle società civili permettono di valutare con buona approssimazione le probabilità di morte degli individui in diverse circostanze; pertanto gli assicuratori desumono dalle statistiche l'ammontare dei premi che essi possono richiedere ai loro assicurati; perché il contratto di assicurazione — come abbiamo detto — è un tipico contratto aleatorio, e, volendo, può essere assimilato ad una scommessa tra assicurato ed assicuratore.

In altri casi molto particolari e di significato molto limitato, la valutazione della probabilità di un evento aleatorio può essere fatta in base all'osservazione di certi sistemi fisici e delle manipolazioni alle quali i sistemi stessi vengono sottoposti.

Sono stati immaginati svariati sistemi fisici che permettono una valutazione adeguata della probabilità di particolari eventi aleatori, e sarebbe difficile darne un elenco completo: si può pensare per esempio al lancio di un dado, il quale generalmente ha la forma di un cubo, ma che potrebbe anche avere la forma di un altro poliedro regolare (tetraedro regolare, icosaedro, pentagonododecaedro); oppure si può pensare al lancio di una moneta, o all'estrazione di un gettone o di una pallina da un'urna ben mescolata, all'estrazione di una carta da un mazzo ben mescolato e così via. In ogni caso si potrebbe dire che si ha un sistema fisico (poliedro, urna, mazzo di carte) il quale viene manipolato in modo da presentare diversi risultati, nessuno dei quali è prevedibile con certezza: per esempio si ritiene di non poter usualmente preve-

dere con quale faccia cadrà una moneta lanciata senza precauzioni sul pavimento; oppure si ritiene di non poter prevedere, con mezzi usuali razionali, quali saranno i numeri che usciranno il prossimo sabato da una certa ruota del lotto. Tra tutti i vari casi possibili, si ritiene che soltanto alcuni costituiscano l'evento aleatorio che si considera. Per esempio, se si tratta dell'estrazione di una carta da un mazzo ben mescolato, si può considerare l'evento aleatorio che consiste nell'estrazione di una carta di colore rosso; se si tratta del lancio di un dado cubico, si può considerare l'evento aleatorio che consiste nella comparsa di un numero pari sulla faccia rivolta in alto e così via.

In queste situazioni, ed in altre pochissime che possono essere assimilate schematicamente a queste, si accetta come valutazione provvisoria e ragionevole della probabilità di un evento aleatorio il rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili.

Così, per esempio, se si tratta dell'estrazione di una carta da un mazzo ben mescolato e si considera come evento aleatorio l'estrazione di una carta di colore rosso, una valutazione provvisoria e prudente della probabilità dell'evento è  $1/2$ . Infatti, se il mazzo è regolare e ben mescolato, soltanto la metà delle carte che possono essere estratte realizza l'evento aleatorio considerato.

Osserviamo che la clausola enunciata, la quale impone che tutti i casi possibili siano tutti ugualmente possibili, può apparire chiara, ma è di ben difficile interpretazione nei casi concreti. Infatti la verifica del fatto che la clausola è rispettata viene eseguita di volta in volta con operazioni non uniformi e di risultato non sicuro: per esempio, nel caso del lancio di un dado, la verifica della validità della clausola può essere fatta accertando che il solido sia omogeneo, e che il suo baricentro sia nel centro di simmetria geometrica. Nel caso dell'estrazione di una pallina da un'urna, la verifica del fatto che la clausola è valida può essere fatta garantendo che le palline siano tutte uguali tra loro e non distinguibili al tatto per la temperatura, o per la scabrosità o per altre circostanze che sarebbe difficile enumerare completamente.

Da ciò che abbiamo detto appare chiaramente che la frase la quale definisce la probabilità di un evento aleatorio come *rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili* non può essere accettata come la definizione della probabilità di un evento, e ciò per varie ragioni. Anzitutto perché, come abbiamo ripetuto più volte, la probabilità non è la proprietà di un evento, ma è il giudizio che un soggetto umano formula a proposito di quell'evento, e quindi può variare da soggetto a soggetto ed a seconda delle informazioni possedute dal soggetto stesso; in secondo luogo perché è ben difficile dare un senso preciso alla clausola la quale impone che tutti i casi possibili siano tutti *ugualmente possibili*. Tale verifica può essere fatta soltanto in pochissimi casi schematici, ed in altri che possono essere assimilati



a questi, del tutto elementari. Nella realtà fisica e sociale i casi in cui occorre prendere delle decisioni o formulare delle leggi, anche se approssimate, sono molto più numerosi di quelli che possono essere rudimentalmente schematizzati con gli apparati fisici che abbiamo descritto o con altri che possono essere escogitati di volta in volta.

## 6. LA LEGGE EMPIRICA DEI GRANDI NUMERI

Le considerazioni che abbiamo svolto finora ci permettono di dare una risposta almeno generica al problema che potrebbe essere enunciato domandando quale sia il significato e la portata della valutazione di probabilità sul mondo reale; lo stesso problema potrebbe essere formulato in altro modo dicendo che, quando avessimo valutato la probabilità di un evento aleatorio con un certo numero, che cosa possiamo ragionevolmente attenderci che avvenga nella realtà?

Come abbiamo detto, la risposta può essere soltanto generica, perché la valutazione della probabilità di un evento aleatorio ha caratteristiche epistemologiche del tutto diverse dall'enunciato di un teorema matematico, o di una deduzione, o anche di una legge fisica. In particolare, nel caso in cui la valutazione della probabilità di un evento è stata fatta in base a statistiche attendibili, supponendo che i fenomeni collettivi e sociali oggetto della statistica non cambino rapidamente, è ragionevole attendersi che i parametri calcolati in base alle statistiche non varino rapidamente e quindi è ragionevole prendere delle decisioni economiche basandosi su quelle statistiche.

Supponiamo, per esempio, che un assicuratore abbia calcolato i premi da chiedere ai suoi clienti per assicurazione in caso di morte; se le condizioni igieniche della popolazione a cui si fa riferimento non sono molto cambiate, se non sono scoppiate delle epidemie che hanno fatto aumentare improvvisamente il numero delle morti nella popolazione in oggetto, appare ragionevole che l'assicuratore non vari di molto le proprie valutazioni di probabilità; ciò tuttavia non lo esime dal compito di tenere aggiornate le statistiche, in modo da poter introdurre nelle sue valutazioni le modifiche che la realtà dei fenomeni biologici gli impone.

Particolare interesse presenta il caso in cui la valutazione di probabilità sia stata fatta in uno di quei casi teorici e schematici in cui si possono contare i casi possibili ed i casi favorevoli e si possa accertare, con qualche attendibilità, che i casi possibili siano tutti *ugualmente possibili*; in queste occasioni si suol dire che si dà una *valutazione a priori della probabilità* ed il numero che così si ottiene viene anche chiamato *probabilità teorica* dell'evento E. In

questi casi si prende in considerazione l'operazione che si esegue ripetendo molte volte la manipolazione del sistema fisico che può dare origine all'evento aleatorio in oggetto; per esempio, si ripete molte volte il lancio della stessa moneta, si fanno molte estrazioni di palline da un'urna, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna e rimescolando accuratamente quest'ultima, si estrae molte volte una carta da un mazzo, rimettendo ogni volta la carta estratta nel mazzo e rimescolandolo accuratamente.

Una successione di operazioni di questo tipo realizza una situazione schematica che viene abitualmente indicata con l'espressione *schema di Bernoulli*, dal nome del grande matematico svizzero del secolo XVIII che fu acuto studioso di calcolo delle probabilità. Si supponga ora di eseguire  $n$  di queste manipolazioni, e sia  $r$  il numero di volte in cui l'evento aleatorio si è presentato. Si ha ovviamente:

$$(1) \quad r \leq n,$$

ed il numero (frazionario e minore di 1):

$$(2) \quad f = r / n$$

viene chiamato *frequenza empirica* dei successi su  $n$  prove.

Orbene, in relazione alla situazione data dallo schema di Bernoulli viene enunciata una proposizione che è spesso chiamata *legge empirica dei grandi numeri*; tale proposizione potrebbe essere enunciata nel modo seguente.

*Quando si opera nella situazione teorica dello schema di Bernoulli, al crescere del numero  $n$  delle prove che si eseguono, la frequenza empirica  $f$  si avvicina quasi sempre di molto alla probabilità teorica, calcolata a priori, dell'evento  $E$ .*

È utile fare alcune osservazioni su questa proposizione, per evitare equivoci e fraintendimenti. Osserviamo infatti che la proposizione stessa viene chiamata da qualche Autore postulato oppure anche principio dei grandi numeri; qualche Autore lo confonde anche con un teorema, dimostrato dallo stesso Bernoulli, in relazione alla medesima questione. Noi abbiamo dato alla proposizione il nome di legge empirica perché crediamo che la sua validità dipenda soltanto dall'esperienza; pertanto crediamo che la proposizione non possa essere qualificata come un principio o un postulato, e meno ancora possa essere dimostrata con i metodi della logica e della matematica.

Si osserva inoltre che nella proposizione entrano alcune espressioni che possono dare l'impressione di essere chiare, ma che non sono tali: una di queste espressioni è la qualifica di *grande* data al numero di esperimenti. Ora si sa

che per la matematica non esistono numeri grandi o piccoli: questa qualifica ha un significato soltanto per la pratica, ed in relazione a determinati problemi concreti: per esempio, il numero 10 000 può essere considerato grande se esprime il numero delle pagine di un libro, ma deve essere considerato piccolissimo, addirittura trascurabile, se riferito alle molecole che entrano in un litro d'acqua a temperatura ordinaria. Analoghe osservazioni possono essere fatte a proposito dell'espressione con cui si afferma che la frequenza empirica si avvicina quasi sempre di molto alla probabilità teorica, calcolata a priori; infatti delle espressioni come queste non hanno significato matematico rigoroso.

Pertanto l'enunciato della legge empirica dei grandi numeri ha soltanto un significato pratico; in particolare poi esso non dice nulla sul singolo evento aleatorio futuro, come invece molti credono di poter garantire.

## 7. LO SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE

Abbiamo visto quale sia il significato della legge dei grandi numeri, quando la si voglia utilizzare per la previsione di ciò che accadrà nei singoli casi concreti che coinvolgono un determinato evento aleatorio. Osserviamo ora che, in relazione allo schema delle prove ripetute o di Bernoulli si può anche prendere in considerazione, accanto all'evento aleatorio  $E$ , anche un secondo evento, che è strettamente collegato alla serie di  $n$  prove o manipolazioni successive del medesimo sistema fisico. Tale secondo evento aleatorio si ritiene realizzato quando sulla serie di  $n$  prove l'evento  $E$  si presenti  $r$  volte, ovvero, come si suol dire abitualmente, si verificano  $r$  successi, essendo  $r$  un numero naturale che soddisfa alle ovvie limitazioni (1) del paragrafo precedente.

È possibile dare una valutazione della probabilità di questo evento, in funzione della valutazione  $p$  della probabilità del singolo evento  $E$  e della valutazione:

$$q = 1 - p$$

della probabilità dell'evento contrario  $E'$ .

Indicheremo con  $P(r)$  la valutazione della probabilità di questo secondo evento, essenzialmente diverso, ripetiamo, dal singolo evento  $E$ . Il numero  $P(r)$  è dato, in funzione di  $r$ , di  $n$ , di  $p$  e di  $q$  da una formula che qui non riportiamo e che presenteremo nel paragrafo 9.5; ci limitiamo a dire che tale formula dà un valore massimo quando la frazione  $r/n$  si avvicina alla valutazione teorica a priori della probabilità del singolo evento  $E$ , ed assume invece valori molto piccoli quando  $r/n$  si allontana da questo valore.

Per esempio, consideriamo una serie di  $n$  lanci di una moneta, e supponiamo che l'evento  $E$  considerato sia la comparsa di una data faccia, per esempio testa. La valutazione a priori della probabilità del singolo evento, in mancanza di informazioni su eventuali deformazioni della moneta o di altri difetti, è ovviamente  $1/2$ . Se consideriamo un secondo evento aleatorio, che consiste nella comparsa di  $r$  volte testa su  $n$  lanci, la valutazione teorica a priori della probabilità di questo secondo evento dà un valore massimo quando  $r$  si avvicina alla metà del numero  $n$  dei lanci. Invece è molto piccola la valutazione della probabilità di una serie di  $n$  lanci, nella quale compaia ogni volta testa; per esempio, se è  $n = 10$ , la valutazione della probabilità della comparsa di testa 10 volte di seguito è minore di  $1/1000$ ; il che significa che è ragionevole pagare una posta di mille lire a patto di ricevere un milione se si realizza la serie di 10 lanci che danno in ogni caso testa.

Queste osservazioni conducono spesso alcuni incauti scommettitori a comportamenti non razionali, che sono fondati sostanzialmente sulla confusione tra valutazione della probabilità del singolo evento e la valutazione della probabilità di una data serie di  $n$  eventi. Per restare nell'esempio dei 10 lanci di moneta, se in 9 lanci di seguito fosse comparsa testa, è diffusa la convinzione che il decimo lancio debba dare un diverso risultato; e ciò perché la valutazione della probabilità della serie di 10 lanci con il medesimo risultato è molto piccola, come abbiamo visto. Questa argomentazione è fallace, perché, dopo 9 lanci dei quali si conosce il risultato, la serie di 10 lanci non può più essere oggetto di scommessa: essa infatti è oggetto di storia passata. Invero le informazioni che si hanno dopo 9 lanci dei quali si conosce il risultato sono ovviamente diverse da quelle che si hanno prima dell'inizio della serie. Pertanto, quando sono ormai fatti 9 lanci, non ha più senso scommettere sulla serie di 10, ma soltanto sul lancio successivo; e la valutazione della probabilità del risultato di quest'ultimo lancio è ovviamente  $1/2$ , come quella di ognuno dei lanci precedenti.

In forma suggestiva, la situazione è spesso descritta dicendo che *la moneta non ha né memoria né coscienza*: non ha memoria, e quindi non può ricordarsi che nei 9 lanci precedenti è comparsa testa; non ha coscienza, e quindi non si può sperare che essa cerchi di «compensare» nel decimo lancio il presunto «squilibrio» dei 9 primi lanci che hanno dato il medesimo risultato.

Invece l'argomentazione fallace di cui abbiamo detto è molto diffusa, e su queste basi vive tutta una industria di produzione di previsioni che si pretendono «sicure», e che invece spesso inducono gli sprovveduti a scommesse rovinose.

Gli equivoci sono anche favoriti dall'errata interpretazione di un classico teorema di Bernoulli (teorema del quale abbiamo già detto) e che si riferisce ad una serie di ripetizioni delle medesime manipolazioni di un sistema fisico,

che abbiamo convenzionalmente denominato *schema di Bernoulli*. Il teorema ricordato dimostra infatti che, al crescere del numero delle prove (lanci, estrazioni, manipolazioni in genere), si avvicina ad 1 la valutazione della probabilità che la differenza tra la frequenza empirica dei successi e la probabilità teorica valutata a priori sia, in valore assoluto, molto piccola.

Pertanto tale teorema, ripetiamo, non è una dimostrazione della legge empirica dei grandi numeri (come qualcuno erroneamente crede), ma dice semplicemente che una certa valutazione di probabilità si avvicina al valore 1, valore che abbiamo già accettato come valutazione della probabilità dell'evento certo. Ma occorre ricordare che vi è una differenza essenziale tra la certezza e la valutazione di probabilità vicina ad 1.

Tuttavia, nonostante i gravi fraintendimenti, lo schema di Bernoulli si dimostra di grande utilità per dominare molti fenomeni, soprattutto quelli che riguardano insieme molto numerosi di individui o di fatti individuali. Per esempio, può essere utile conoscere quanti individui di un certo insieme posseggono o non posseggono un determinato carattere; se l'insieme è molto numeroso può essere difficile, se non addirittura praticamente impossibile, esaminare ogni singolo individuo dell'insieme stesso. Si procede allora alla costruzione di un insieme più ristretto, i cui individui vengono scelti, come suol dirsi, *a caso* nell'insieme di partenza; quest'ultimo viene abitualmente chiamato *universo*, e l'insieme più ristretto viene detto un *campione* dell'universo. In queste condizioni, il possesso di quel certo carattere da parte di un individuo del campione può essere considerato come un evento aleatorio; e molto spesso la costruzione del campione viene assimilata alla ripetizione di un certo esperimento, nello schema di Bernoulli. In modo analogo, quando in fisica, in chimica, in astronomia o in altre scienze si eseguono molte osservazioni o misurazioni o conteggi, avviene molto spesso che non si ottenga sempre lo stesso risultato. Allora è comodo considerare le discrepanze delle varie osservazioni (o delle varie misure o conteggi) tra loro come effetti di molte cause poco conosciute, e quindi difficilmente prevedibili; in altre parole, è comodo considerare la comparsa di *errori di osservazione* durante la ripetizione di molte osservazioni o di molti esperimenti come particolari realizzazioni dello schema di Bernoulli. Di conseguenza la ricerca delle informazioni più attendibili tra tutte quelle ottenute (diverse tra loro) viene fatta utilizzando delle valutazioni di probabilità che si riattaccano allo schema di Bernoulli.

Le applicazioni di queste idee sono talmente importanti per la scienza e per la tecnica che sono state costruite delle teorie, come la teoria del campionamento e la teoria degli errori, per sviluppare questi concetti e per ottenere le migliori informazioni possibili dalle osservazioni che si fanno, e dalle misure e dalle manipolazioni che si eseguono sulla realtà, sia essa la realtà della natura fisica, materiale, oppure quella dei fenomeni umani e sociali.

## 8. IL CONCETTO DI SPERANZA MATEMATICA

Abbiamo detto ripetutamente che la valutazione di probabilità di un evento aleatorio è strettamente collegata con un impegno economico del soggetto che pronuncia tale valutazione, basandosi sulle informazioni che egli possiede. A queste valutazioni ed a questi impegni sono legati alcuni concetti che vengono abitualmente impiegati per esporre i fatti riguardanti i contratti aleatori (scommesse e contratti di assicurazione) ed il comportamento economico dei soggetti umani.

Si consideri anzitutto un soggetto T, il quale stringe un contratto aleatorio in relazione ad un certo evento aleatorio E; questo contratto si realizza completamente quando il soggetto T versa una somma  $a$  (posta del gioco, prezzo del biglietto della lotteria, premio di assicurazione ecc.) col patto di ricevere una certa somma  $S$  se l'evento E si verifica.

Sia  $p$  la valutazione che il soggetto T dà della probabilità dell'evento E; il prodotto:

$$(1) \qquad pS$$

viene spesso chiamato *speranza matematica* del soggetto T, in relazione al contratto, aleatorio che egli stringe.

Con riferimento a questo contratto, potremo considerare anche l'espressione:

$$(2) \qquad pS - a$$

che chiameremo *bilancio globale* del soggetto; in questa espressione compare con segno positivo la somma di denaro che abbiamo chiamato *speranza matematica*, e con segno negativo la somma che il soggetto deve versare per poter stringere il contratto.

Questo bilancio globale è di grande importanza per poter giudicare della convenienza economica di un determinato contratto aleatorio; infatti sulla valutazione del bilancio globale e sulla legge empirica dei grandi numeri si basa sostanzialmente il comportamento di coloro i quali gestiscono delle imprese che vivono e prosperano sui contratti aleatori. Tali imprese sono, per esempio, le imprese di assicurazione, oppure le case da gioco ed in generale le imprese di scommesse su avvenimenti aleatori, come lotterie o avvenimenti sportivi.

I concetti di cui stiamo parlando si applicano in particolare in quei casi in cui gli eventi aleatori possono essere identificati, con buona approssima-

zione, con i risultati di operazioni relativamente semplici eseguite su certi sistemi fisici; per esempio, con lanci di monete o dadi, con estrazione di palline da urne, o di carte da mazzi ben mescolati ecc. Abbiamo visto nel paragrafo 6 che in questi casi è ragionevole dare una valutazione provvisoria della probabilità di un evento, dividendo il numero dei casi favorevoli per quello dei casi possibili, ovviamente dopo essersi accertati che questi ultimi siano tutti ugualmente possibili.

In questi casi (relativamente rari) è possibile compilare il bilancio globale del soggetto che stringe il contratto (giocatore d'azzardo, scommettitore, sottoscrittore di una polizza ecc.). Si suol dire che il gioco d'azzardo, o in generale il contratto aleatorio, è *equo* se il bilancio globale dello scommettitore è nullo; in altre parole, il contratto si definisce *equo* se il giocatore, per essere ammesso a stringere il contratto stesso, deve pagare una somma esattamente uguale alla sua speranza matematica, essendo ovviamente quest'ultima valutata mediante la (1), in base alla valutazione teorica a priori della probabilità dell'evento considerato.

Ciò avviene di solito quando la scommessa ha luogo tra due persone fisiche, e nei casi particolarmente semplici; invece il bilancio globale del singolo scommettitore è quasi sempre negativo quando il singolo acquista il biglietto di una lotteria, oppure scommette contro un imprenditore (tenitore di bisca, gerente di casinò, lo Stato ecc.). In altre parole, in questi casi, al singolo scommettitore viene richiesta, per poter stringere il contratto aleatorio, una somma maggiore della sua speranza matematica.

Nel paragrafo 5 abbiamo già preso in esame la situazione psicologica che spinge alcuni soggetti a stringere dei contratti sostanzialmente svantaggiosi; abbiamo anche visto che spesso il comportamento di certi soggetti scaturisce dalla confusione tra la valutazione della probabilità di un singolo evento e quella di una serie di eventi. Vorremmo qui aggiungere che, oltre alle proposizioni che abbiamo già enunciato e commentato, se ne possono dimostrare anche altre, che riguardano le successioni di contratti aleatori, cioè il comportamento di coloro i quali vengono spesso chiamati «scommettitori incalliti»; occorre infatti ricordare che lo scommettitore deve pagare la sua posta prima di poter stringere qualunque contratto: deve comperare il biglietto della lotteria, deve pagare la bolletta del lotto ecc. Di conseguenza il giocatore che non può pagare la posta non può più stringere il contratto aleatorio, anche qualora la valutazione prudente della probabilità gli dimostrasse che il contratto è accettabile. In altre parole, può avvenire che, anche quando la scommessa è equa, il giocatore che è finanziariamente più debole, perché parte con un patrimonio inferiore all'altro, può essere più facilmente «sbancato», come suol dirsi, prima dell'altro: egli ha infatti minori possibilità di sopravvivere ad una «serie nera», cioè ad una lunga successione di colpi avversi.

A questo proposito si dimostra che le valutazioni delle probabilità di sopravvivenza di due giocatori ad una lunga serie di partite di gioco d'azzardo sono proporzionali ai rispettivi patrimoni, dei quali i giocatori possono disporre all'inizio della serie di partite.

## 9. ESERCIZI E COMPLEMENTI

**9.1.** Nel paragrafo 3 abbiamo detto che, fondandosi sul principio di coerenza, è possibile dimostrare la relazione fondamentale:

$$(1) \quad p + q = 1$$

che lega le valutazioni di probabilità che un medesimo soggetto dà di un evento  $E$  e dell'evento contrario  $E'$ .

A proposito di questa relazione si può osservare che essa può essere giustificata in modo semplicistico quando si accetti che un determinato evento aleatorio  $E$  possa essere ad ogni effetto schematizzato con manipolazioni su sistemi fisici, in particolare con estrazioni di palline da urne. Infatti in questo caso si usa ragionare nel modo seguente.

Supponiamo che in un'urna siano state introdotte  $n$  palline, indistinguibili tra loro al tatto; supponiamo che tra esse ve ne siano  $r$  bianche, avendosi ovviamente:

$$(2) \quad r \leq n.$$

Si assimili l'evento aleatorio  $E$  all'estrazione di una pallina bianca; allora, in mancanza di ulteriori informazioni, e supponendo di aver accertato che veramente le palline siano indistinguibili tra loro, la valutazione teorica a priori della probabilità dell'evento  $E$  è data dal numero:

$$(3) \quad p = r / n.$$

Ma se l'urna contiene  $r$  palline bianche, essa ne contiene  $(n - r)$  che bianche non sono. Pertanto, per ragioni analoghe a quelle esposte sopra, la valutazione teorica a priori della probabilità  $q$  dell'evento  $E'$ , contrario di  $E$ , è data da:

$$(4) \quad q = (n - r) / n,$$

e si verifica che tra i numeri  $p$  e  $q$  ora definiti vale la (1).



Il ragionamento precedente vale ovviamente soltanto nel caso in cui l'evento E possa essere schematizzato nel modo rudimentale di cui si è detto. Tuttavia, anche qualora una assimilazione cosiffatta non possa essere considerata accettabile, è possibile dimostrare la (1) facendo ricorso al principio di coerenza, con le considerazioni che seguono.

Si faccia riferimento alla situazione presentata nel paragrafo 2; ivi sono stati presentati due contraenti: T (Tizio) e C (Caio). Essi sborsano ciascuno una quantità di denaro, rispettivamente  $a$  e  $b$ , col patto che la somma complessiva, cioè:

$$(5) \quad S = a + b$$

verrà ritirata da T oppure da C a seconda che si verifichi E oppure E'.

In queste condizioni, diremo che T valuta col numero:

$$(6) \quad p = a / S = a / (a + b),$$

la probabilità dell'evento E, ed ovviamente accetta di valutare con il numero:

$$(7) \quad q = b / S = b / (a + b),$$

la probabilità dell'evento contrario E'.

Supponiamo ora che il soggetto T creda di essere particolarmente astuto e quindi progetti di scommettere con un altro soggetto M (Mevio) sull'evento E', pensando di valutare le probabilità in modo tale da vincere in ogni caso, tanto se accade E quanto se accade E', confidando sul fatto che la vincita in una delle scommesse superi in ogni caso la perdita sicura nell'altra. Vogliamo dimostrare che, se il principio di coerenza è rispettato, il soggetto T deve dare, in questa seconda scommessa con M, una valutazione della probabilità di E' uguale a quella che egli ha accettato nella prima scommessa con C, e viceversa, e di conseguenza non può contare su una vincita sicura. Indichiamo con  $q'$  la valutazione della probabilità di E' che Tizio dà nella scommessa con M, e sia  $S'$  la somma che egli incasserà nella scommessa con M se si verificherà l'evento E'.

In definitiva quindi egli spenderà la somma:

$$(8) \quad pS + q'S';$$

se la (1) non è rispettata, si può escogitare un sistema di scommesse nel quale uno dei contraenti è sicuro di vincere oppure di perdere. Infatti, se è, per esempio:

$$(9) \quad q' > 1 - p, \quad \text{ossia} \quad p + q' > 1,$$

il sistema di scommesse in cui è:

$$(10) \quad S = S'$$

porta Tizio sicuramente alla perdita. Infatti egli paga sicuramente:

$$(11) \quad (p + q')S > S,$$

mentre in ogni caso vince al massimo  $S$ . Viceversa, se si ha:

$$(12) \quad q' = q \quad \text{ossia} \quad p + q' = 1,$$

nessuno, né Tizio né gli altri contraenti, è sicuro di vincere o di perdere. Supponiamo infatti che la (12) sia rispettata, e supponiamo che si abbia:

$$(13) \quad S \leq S'.$$

Allora, in base alla (12), supposta rispettata, si verifica che si ha:

$$(14) \quad S \leq pS + q'S' \leq S'.$$

In altre parole, la posta pagata da Tizio non supera il maggiore e non è inferiore al minore dei possibili guadagni.

Con ragionamenti analoghi (anche se meno semplici) si dimostra la validità della formula (2) del paragrafo 3 e della (5) del paragrafo 5.

Anche queste formule sono giustificate spesso con ragionamenti che sono validi nei soli casi in cui gli eventi aleatori considerati siano rappresentabili completamente con manipolazioni su sistemi fisici.

**9.2. OSSERVAZIONE.** Le modalità con le quali vengono espresse le valutazioni di probabilità degli eventi aleatori dipendono spesso dalle convenzioni e dalle abitudini. Così, negli ambienti tradizionalmente dediti alle scommesse, si usano di volta in volta delle espressioni convenzionali tipiche di ogni ambiente. Così per esempio, facendo riferimento al contratto tipico di cui abbiamo detto nel paragrafo 2, e che abbiamo richiamato sopra, la valutazione di probabilità ivi data con la (1) si suole presentare con la frase «Tizio scommette  $a$  su  $S$ » oppure anche con l'altra «Tizio scommette  $a$  contro  $b$ ». Analogamente, nel linguaggio delle case da gioco, si suol dire per esempio che la vincita a «rouge et noir» alla roulette è pagata «due volte la posta»; effettivamente il giocatore ha già messo il suo gettone sul tappeto, ed il banco ne aggiunge un altro, che viene ritirato dal giocatore, insieme con la posta, in caso di vincita. Quindi, secondo l'osservazione fatta ora, la valutazione di probabilità che il giocatore dà della vincita a «rouge et noir» si po-

trebbe enunciare dicendo «uno su due» oppure anche «uno contro uno». Altri linguaggi convenzionali vengono adottati per enunciare le valutazioni di probabilità nelle corse di animali (cani o cavalli) o in altre scommesse.

**9.3.** Nel paragrafo 5 abbiamo accennato alla valutazione teorica a priori della probabilità di un evento che si può dare nei rari casi in cui l'evento in parola possa essere assimilato al risultato di manipolazioni su certi sistemi fisici: lanci di dadi o monete, estrazioni di palline da sacchetti o da urne. In questi casi una valutazione prudente a priori della probabilità dell'evento può essere data dividendo il numero dei casi che si considerano favorevoli per il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili; abbiamo anche aggiunto che per verificare il sussistere di quest'ultima clausola (essenziale per la validità della procedura) non si possono dare delle regole generali.

Tuttavia, anche nei casi che si presumono più semplici, il conteggio dei casi possibili richiede un certa attenzione, come è dimostrato da una classica discussione riguardante la seguente scommessa semplicissima: si lancino contemporaneamente sul pavimento due monete uguali, ognuna delle quali può ovviamente mostrare testa oppure croce: si domanda di valutare la probabilità che compaiano due teste. Una considerazione affrettata porterebbe a valutare questa probabilità col numero  $1/3$ , argomentando che i casi possibili sono tre: due teste, due croci, una testa ed una croce. Tuttavia un'analisi più accurata porta alla valutazione data da  $1/4$ , perché la comparsa di due facce diverse può essere realizzata in due modi diversi, a seconda che ciascuna moneta mostri testa oppure croce.

Il dimenticare queste avvertenze elementari porta spesso qualche provvedimento a fare scommesse nettamente svantaggiose.

**9.4. ESERCIZIO 1.** Ad un concorso si sono presentati tre candidati: Aldo, Bernardo, Carlo; il regolamento prevede che ciascuno debba svolgere una dissertazione, sorteggiata dal candidato fra dieci preparate dalla commissione giudicatrice. Questa prepara le dieci tesi, poi imbussola dieci numeri ed invita i candidati in ordine alfabetico ad estrarre il numero della dissertazione che dovranno svolgere. I candidati Bernardo e Carlo protestano dicendo che, con la chiamata in ordine alfabetico, essi hanno minori possibilità di Aldo; il presidente della commissione risponde dicendo che, anche con la procedura adottata, la valutazione della probabilità che ha ciascun candidato (quindi anche Bernardo e Carlo) di estrarre il numero di una determinata dissertazione è uguale per ogni candidato, e vale  $1/10$ . Chi ha ragione?

Risposta: ha ragione il presidente della commissione. Infatti, per esempio, l'evento aleatorio che il secondo candidato (Bernardo) estragga un determi-

nato numero, per esempio il 5, può essere considerato come il prodotto logico di due eventi, diciamoli E ed H: E si verifica se il numero 5 non viene estratto da Aldo; una volta che E si è verificato, H si verifica se Bernardo estrae il 5 fra i 9 lasciati. È quindi possibile applicare in questo caso i ragionamenti svolti sopra nel paragrafo 4, ed in particolare le formule (2), (3) e (4). Ora la valutazione della probabilità di E è ovviamente  $9/10$ , quella di H è  $1/9$ , ed il loro prodotto vale  $1/10$ . Analogo ragionamento vale per Carlo.

**ESERCIZIO 2.** Due amici, Dario ed Emilio, giocano ai dadi. Dario ha in mano una coppia di dadi uguali tra loro per grandezza e peso, e sta per lanciali. Emilio dichiara di scommettere 5 contro 1 che Dario non farà 7 e mette cinque mila lire sul tavolo: Dario accetta e mette mille lire sul tavolo. È equa questa scommessa?

Sì. Infatti si può ottenere il numero 7 come somma dei punteggi di due dadi in 6 modi diversi, sulle 36 modalità possibili di presentazione delle facce dei due dadi nella caduta. Pertanto la valutazione della probabilità di non fare 7 porta al numero  $30/36 = 5/6$ . E ciò, in base a quanto è stato detto sopra in 9.2, porta a ritenere equa la scommessa di 5 contro 1.

**ESERCIZIO 3.** I due amici di cui sopra giocano a lanciare monete: Emilio ha in mano tre monete uguali e sta per lancialle. Dario dichiara di scommettere 7 contro 1 che vi sarà almeno una testa tra le facce che compariranno dopo il lancio. È equa questa scommessa?

Sì. Infatti otto sono le possibili presentazioni e tra queste una sola corrisponde a tre presentazioni di croce.

**9.5.** Nel paragrafo 7 abbiamo indicato con  $P(r)$  la valutazione della probabilità dell'evento il quale consiste nel presentarsi dell'evento E per  $r$  volte su  $n$  prove. Tale valutazione può essere espressa in funzione di  $n$ , di  $r$ , e della valutazione della probabilità  $p$  dell'evento E (valutazione costante, da prova a prova) con i calcoli che vedremo subito.

Indichiamo anzitutto con il simbolo:

$$(15) \quad C(n, r),$$

che viene chiamato *coefficiente binomiale*, il numero intero il quale, quando  $r > 0$ , è dato da:

$$(16) \quad C(n, r) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) / (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r),$$

ed è posto convenzionalmente uguale ad 1 quando  $r = 0$ .

Si dimostra allora che la valutazione di probabilità  $P(r)$  si esprime nella forma seguente:

$$(17) \quad P(r) = C(n, r) \cdot p^r \cdot q^{nr}.$$

I calcoli per l'applicazione di questa formula risultano notevolmente gravosi non appena i numeri  $n$  ed  $r$  diventano abbastanza grandi, come avviene quasi sempre nelle applicazioni pratiche. Esistono tuttavia delle formule approssimate, le quali facilitano i calcoli; non possiamo qui soffermarci su questi argomenti. Ci limitiamo ad osservare che il coefficiente binomiale, espresso dalla (16), fornisce il numero di combinazioni (o, se si vuole, di gruppi, raggruppamenti) di  $r$  oggetti scelti fra  $n$  oggetti dati. Così, per esempio, per  $r = 2$ , la (16) fornisce il numero di coppie diverse che si possono formare con  $n$  oggetti dati.

# INDICE

PREFAZIONE .....	pag.	5
1 - LA LOGICA CLASSICA .....	»	9
1. Che cosa è la logica? La deduzione .....	»	9
2. I termini e le proposizioni .....	»	10
3. Inferenze immediate .....	»	12
4. Il sillogismo .....	»	15
5. I teoremi .....	»	16
6. Le definizioni .....	»	19
7. Le dimostrazioni per assurdo e per induzione .....	»	25
8. La risoluzione dei problemi. L'analisi e la sintesi .....	»	28
9. Esercizi e complementi .....	»	31
2 - TEORIA INTUITIVA DEGLI INSIEMI ED ELEMENTI DI ALGEBRA DI BOOLE .....	»	39
1. Sulla definizione del concetto di insieme .....	»	39
2. Intersezione e sue proprietà formali .....	»	41
3. Unione e complementazione rispetto ad un universo .....	»	45
4. Formule ben formate e regole di trasformazione .....	»	50
5. Espressioni delle proposizioni fondamentali della logica classica .....	»	52
6. Gli schemi fondamentali di deduzione .....	»	54
7. Altre operazioni dell'algebra di Boole e forme canoniche .....	»	59
8. Cenno sui diagrammi di Lewis Carroll .....	»	62
9. Esercizi e complementi .....	»	63
3 - CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI E DEI PREDICATI .....	»	69
1. Proposizioni non analizzate e valori di verità .....	»	69
2. Connettivi fondamentali e valori di verità .....	»	70
3. Formule ben formate ed aritmetica modulo 2 .....	»	74
4. Assiomi e regole di deduzione .....	»	78

5. Le tautologie .....	pag. 79
6. I predicati .....	» 81
7. Esercizi e complementi .....	» 83
4 - IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ .....	» 87
1. Le decisioni in condizioni di incertezza .....	» 87
2. Il contratto aleatorio .....	» 88
3. Il principio di coerenza .....	» 91
4. La valutazione condizionata di probabilità .....	» 93
5. Informazioni e valutazioni di probabilità .....	» 95
6. La legge empirica dei grandi numeri .....	» 98
7. Lo schema delle prove ripetute .....	» 100
8. Il concetto di speranza matematica .....	» 103
9. Esercizi e complementi .....	» 105

L'opera si propone di contribuire alla formazione degli insegnanti di matematica della scuola media e dei bienni della secondaria superiore, presentando le più elementari basi teoriche di logica e alcuni fondamenti di calcolo delle probabilità; non intende presentare una raccolta di strategie didattiche, ma vuole stimolare la riflessione degli insegnanti su questi argomenti relativamente nuovi: all'insegnante è lasciato il compito di calare le nozioni acquisite e le idee astratte nella pratica del lavoro didattico quotidiano.